Ez idén a verseny I. fordulója a szokottnál valamivel későbben, március 20-án folyt le az egyes iskolákban a gimnáziumok és ipari technikumok III. és IV. osztályú tanulói részére változatlan feltételek mellett. Munkaidő 5 óra. Beadtak összesen 229 iskolában 3104 dolgozatot (tavaly 236 iskolában 3220 dolgozatot). A gimnáziumok száma tovább növekedett 179-ről. 184-re, viszont az ipari technikumok száma jelentékeny mértékben tovább csökkent 57-ről 45-re.

A központi versenybizottság április 19-i javaslata alapján 122 iskola 325 tanulója – a dolgozat-beadók 10,4%-a – került a II. (döntő) fordulóba (tavaly 138/365 – 11,3%). Részletes adatok iskolafajok, megyék és városok szerint az itt közölt táblázatban találhatók.

A döntőbe került 325 tanuló közül 189 (58,3% – tavaly 55,3%) lapunk feladatmegoldója.

A tavalyi versenyen helyezést nyert 34 III. osztályú tanuló közül 29 bekerült a döntőbe (3 nem indult el az idén); a múlt évi Arany Dániel versenyen helyezést elért 24 II. osztályú tanuló közül 19 ez idén is a döntőbe jutott (2 nem indult el ez idén).

Kimutatás az 1957. évi Országos Matematikai Tanulmányi Verseny I. fordulójáról megyék, városok és iskolafajok szerint

Megyék és városok	Beadott dolgozatok						Döntőbe került					
	gimnázium		ip.techn.		összesen		gimnázium		ip.techn.		összesen	
	iskola	tanuló	iskola	tanuló	iskola	tanuló	iskola	tanuló	iskola	tanuló	iskola	tanuló
1. Baranya	3	42	–	–	3	42	1	1	–	–	1	1
I. Pécs város	3	76	3	29	6	105	1	1	1	3	2	4
2. Bács-Kiskun ..	5	45	1	2	6	47	5	10	1	1	6	11
3. Békés	11	153	1	14	12	167	4	6	–	–	4	6
4. Borsod	6	90	–	–	6	90	4	10	–	–	4	10
II. Miskolc város .	4	59	4	60	8	119	2	4	1	3	3	7
5. Csongrád	6	54	–	–	6	54	3	9	–	–	3	9
III. Szeged város ..	3	58	3	38	6	96	2	9	1	2	3	11
6. Fejér	4	52	2	16	6	68	1	7	1	3	2	10
7. Győr-Sopron ..	9	162	4	47	13	209	6	25	–	–	6	25
8. Hajdú-Bihar ..	5	41	–	–	5	41	1	2	–	–	1	2
IV. Debrecen város	6	64	3	35	9	99	2	9	3	4	5	13
9. Heves	4	88	–	–	4	88	2	6	–	–	2	6
10. Komárom	8	66	1	2	9	68	3	9	1	2	4	11
11. Nógrád	2	21	1	8	3	29	1	3	–	–	1	3
12. Pest	2	103	1	9	10	112	4	12	1	1	5	13
13. Somogy	6	97	1	8	7	105	3	5	–	–	3	5
14. Szabolcs	10	97	–	–	10	97	3	3	–	–	3	3
15. Szolnok	13	179	1	9	14	188	9	15	–	–	9	15
16. Tolna	4	33	–	–	4	33	2	2	–	–	2	2
17. Vas	9	110	1	5	10	115	4	5	–	–	4	5
18. Veszprém	9	150	1	22	10	172	7	14	–	–	7	14
19. Zala	2	18	1	24	3	42	2	4	–	–	2	4
Vidék	141	1858	29	328	170	2186	72	171	10	19	82	190
V. Budapest*	43	713	16	205	59	918	34	125	6	10	40	135
Összesen	184	2571	45	533	229	3104	106	296	16	29	122	325

*A gimnáziumokhoz sorolva 1 katonai középiskola 16 versenyzővel, akik közül 2 bekerült a döntőbe.

Alább közöljük az I. fordulón kitűzött 3 feladatot megoldásokkal és megjegyzésekkel.

1. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha $a+b$ pozitív szám, akkor*
$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

I. megoldás: A bizonyítandó állítás írható az

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\geq 0 \tag{1}$$

alakban.

A baloldalt közös nevezőre hozva, majd a számlálót ismételten tényezőkre bontva nyerjük, hogy
$$\frac{a^3+b^3-ab^2-a^2b}{a^2b^2}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)}{a^2b^2}=$$
$$=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2-ab)}{a^2b^2},$$

vagyis egyenlőtlenségünk így is írható

$$\frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2b^2}\geq 0. \tag{2}$$

Mivel az $a=0$, $b=0$ értékek ki vannak zárva (mert különben az adott egyenlőtlenség értelmetlen volna), a^2b^2 mindig pozitív, $(a-b)^2$ nem lehet negatív, $(a+b)$ pedig a feltétel szerint pozitív, és így az (1)-gyel egyenértékű (2) helyessége nyilvánvaló. Az egyenlőség jele csak akkor érvényes, ha $a=b$.

Megjegyzés. Lényegében ugyanezeken az átalakításokon keresztül jutunk célhoz akkor is, ha bizonyítandó egyenlőtlenséget összevonás után a feltétel szerint pozitív $\dfrac{a^2b^2}{a+b}$ értékkel szorozzuk, és azután redukáljuk 0-ra, vagy ha a két oldal különbségét úgy képezzük, hogy a két oldal megfelelő tagjainak különbségét képezzük először, amikor is egyszerű módon adódik a tényezőkre bontás. Lényegében ehhez az eljáráshoz csatlakozik a következő megoldás.

II. megoldás: Egyenlőtlenségünk
$$pu+\frac{1}{p}v\geq u+v$$
alakban írható, ahol a $p=\dfrac{a^2}{b^2}$, $u=\dfrac{1}{a}$, $v=\dfrac{1}{b}$. Vizsgáljuk meg, hogy milyen esetekben áll fenn ez az egyenlőtlenség, ha $p\geq 1$, és $u>0$. A két oldal különbsége (mely tehát nem lehet negatív):
$$pu+\frac{1}{p}v-u-v=(p-1)u+\left(\frac{1}{p}-1\right)v=(p-1)\left(u-\frac{v}{P}\right).$$
Ez 0, ha $p=1$. Ellenkező esetben az első tényező feltétel szerint pozitív, tehát a második sem lehet negatív:
$$u\geq\frac{v}{p}\quad\text{azaz, mivel}\quad u>0,\quad p>0,\quad p\geq\frac{v}{u}.$$
Az egyenlőtlenség tehát helyes, ha p sem 1-nél, sem $\dfrac{v}{u}$-nál nem kisebb. A versenyfeladat esetében feltehetjük, hogy $a\geq b$, a feladat feltétele szerint pedig $a>-b$. A kettőből ekkor
$$a\geq|b|,\qquad\frac{a}{|b|}\geq 1,\qquad\frac{a^2}{b^2}\geq 1.$$
Így $p=\dfrac{a^2}{b^2}$, $u=\dfrac{1}{a}$, $v=\dfrac{1}{b}$ választás mellett
$$p\geq 1,\quad\text{másrészt}\quad p=\frac{a^2}{b^2}=\frac{a}{|b|}\cdot\frac{a}{|b|}\geq\frac{a}{|b|}\geq\frac{a}{|b|}\geq\frac{a}{b}=\frac{v}{u}$$
végül az $a|\geq|b|\geq 0$ (és nyilván $a\neq 0$) folytán $u=\dfrac{1}{a}>0$. Így alkalmazható eredményünk, és a bizonyítandó egyenlőtlenség, helyességét adja. Ezzel állításunkat egy valamivel általánosabb egyenlőtlenség következményeként kaptuk.

Megjegyzés. Számos megoldás nem volt teljes értékű, mert szerzője, szorozva vagy osztva $(a+b)$-vel, nem hangsúlyozta, hogy $a+b>0$. Természetesen kimondottan hiba, ha a versenyző kiemelte, hogy $a+b\neq 0$., mert ezzel elárulta, hogy nincs tisztában azzal, hogy egyenlőtlenségek szorzásánál (osztásánál) lényeges a szorzó (ill. osztó) előjele.

Sajnos, még gyakoribb volt az a megsemmisítő hiba, hogy versenyző ab-vel mint pozitív számmal szorzott vagy osztott, holott ab előjeléről nem tudunk semmit.

2. feladat: *Egy téglalap mindegyik oldalára mint alapra rajzoljunk kifelé olyan téglalapot, amelynek magassága az alap n-ed része. Egyenlő kerületű téglalapokból indulva ki megválasztható-e n értéke úgy, hogy az 5 téglalapból álló idom területe mindig ugyanakkora legyen?*

I. megoldás: Tekintsünk két tetszőleges, egyenlő kerületű téglalapot. Legyenek az oldalak a, b, ill. c, d, ahol $a+b=c+d$.

A feladat szerint megalkotva mindkettőből az 5 téglalapból álló idomot, ezek területe egyenlő :

$$ab+2\left(a\cdot\frac{a}{n}+b\cdot\frac{b}{n}\right)=cd+2\left(c\cdot\frac{c}{n}+d\cdot\frac{d}{n}\right),$$

vagyis

$$ab+\frac{2a^2+2b^2}{n}=cd+\frac{2c^2+2d^2}{n}.$$

Mindkét oldalt n-nel szorozva, és rendezve

$$\begin{aligned}n(ab-cd)&=2[c^2+d^2-(a^2+b^2)]=\\&=2[(c+d)^2-(a+b)^2-2cd+2ab].\end{aligned}$$

Mivel a feltétel szerint $c+d=a+b$, azért

$$n(ab-cd)=2(2ab-2cd)=4(ab-cd),$$

és így feltéve, hogy $ab-cd\neq 0$,

$$n=4.$$

Ha $ab-cd=0$, akkor az $a+b=c+d=s$ jelölést használva, $b=s-a$, $d=s-c$, és így

$$\begin{aligned}a(s-a)-c(s-c)&=as-a^2-cs+c^2=s(a-c)-(a^2-c^2)=\\&=(a-c)(s-a-c)=0,\end{aligned}$$

ahonnan, vagy $c=a$, vagy $c=s-a$. Mindkét esetben a két téglalap egybevágó, és n értéke ez esetben tetszőleges.

II. megoldás: Legyenek a téglalap oldalai a és b. A feladat szerint képezett 5 téglalapból álló idom területe

$$T=ab+\frac{2a^2}{n}+\frac{2b^2}{n}.$$

Adjunk a jobboldalhoz $\frac{4ab}{n}-\frac{4ab}{n}$-et, hogy behozhassuk az állandó $a+b$ kifejezést:

$$\begin{aligned}T&=ab+\frac{2a^2}{n}+\frac{4ab}{n}+\frac{2b^2}{n}-\frac{4ab}{n}=\frac{2(a^2+2ab+b^2)}{n}+ab-\frac{4ab}{n}=\\&=\frac{2(a+b)^2}{n}+ab\left(1-\frac{4}{n}\right).\end{aligned}$$

Ha feltesszük, hogy $a+b$ állandó, akkor a jobboldal első tagja nem függ a téglalap alakjától, a második tag azonban akkor és csakis akkor nem függ külön-külön az a és b oldaltól (vagyis a téglalap alakjától), ha értéke 0, vagyis (mivel $ab\neq 0$)

$$1-\frac{4}{n}=0,$$

ahonnan

$$n=4.$$

Ez esetben T állandó értéke

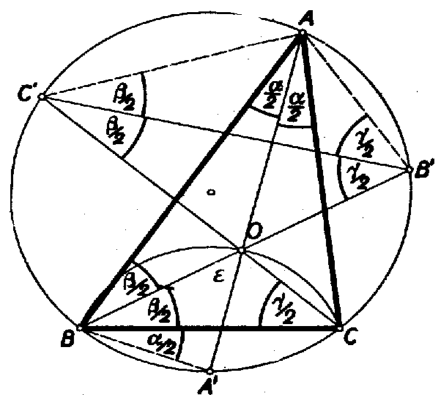
$$\frac{(a+b)^2}{2}$$

Megjegyzések: 1. A feladatot megoldó versenyzők legnagyobb része az 1. megoldás szerint dolgozott, de a diszkussziót ($ab-cd=0$ esetén) már kevés versenyző végezte el. A II. megoldás szerint dolgozók pedig legtöbbnyire csak arra mutattak rá, mindjárt a $T=ab+\frac{2a^2}{n}+\frac{2b^2}{n}$ alakban, hogy $n=4$ esetén $T=\frac{1}{2}(a+b)^2$ állandó, és egyáltalán nem törődtek azzal, hogy nem lehet-e T más n értékekre is független a téglalap alakjától.

2. Több versenyző rámutatott arra, hogy a feladat minden nehézség nélkül általánosítható a $90°$-os téglalapról α szögű paralelogrammára, oly módon, hogy az oldal n-ed részével toldjuk meg mindkét irányban a szomszédos oldalt. Ez esetben az 5 téglalap mindegyikének területe, és így T is, az n-től független $\sin\alpha$ állandóval szorzódik.

3. feladat. *Adva van egy kör, annak kerületén egy A pont és belsejében egy O pont. Szerkesszük meg a kör kerületén a B és C pontokat úgy, hogy az ABC háromszögbe írt kör középpontja az adott O pont legyen.*

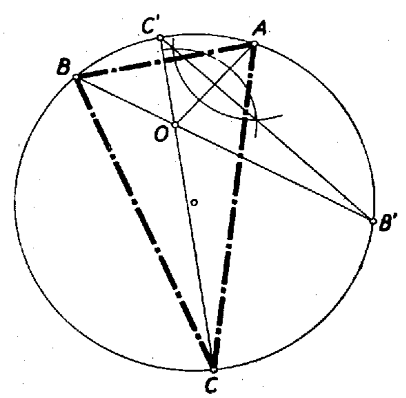
I. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak, a betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

A BO és CO szögfelezők messék a kört másodszor a B', ill. C' pontokban. A kerületi szögek tétele szerint $AB' = B'C$, és $AC' = C'B$, és így ugyancsak a kerületi szögek tételének értelmében az $OB'AC'$ négyszögben a $B'C'$ átló felezi a B' és C' csúcspontoknál fekvő szögeket, vagyis a $B'C'$ átló a négyszög szimmetria tengelye. Ebből következik, hogy a négyszög deltoid, és $B'C'$ merőlegesen felezi az AO átlót.

Eszerint az igen egyszerű szerkesztés menete Az AO szakaszt merőlegesen felező egyenes metszi ki a körből a B' és C' pontokat (2. ábra).



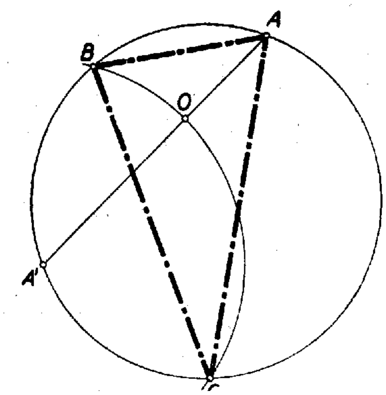
2. ábra

A $B'O$ és $C'O$ egyeneseknek második metszéspontja a körrel szolgáltatja a keresett B, ill. C pontokat.

II. megoldás: Még egyszerűbb szerkesztéshez jutunk a következőképpen: Legyen az AO egyenes második metszéspontja a körrel A'. Az $A'BO_\triangle$-ben a O csúcsnál fekvő ϵ szög az $AOB_\triangle$ külső szöge (1. ábra). Tehát $\epsilon = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2}$. Az $A'BC\sphericalangle$ mint kerületi szög $\dfrac{\alpha}{2}$, és így az $A'BO\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = \epsilon$. Tehát az $A'BO_\triangle$-ben e két egyenlő szöggel szemben fekvő két oldal is egyenlő, vagyis

$$A'B = A'O, \qquad \text{hasonlóan} \qquad A'C = A'O.$$

Eszerint az A' körül $A'O$ sugárral rajzolt kör metszi ki az adott, körből a keresett B és C pontokat (3. ábra).



3. ábra

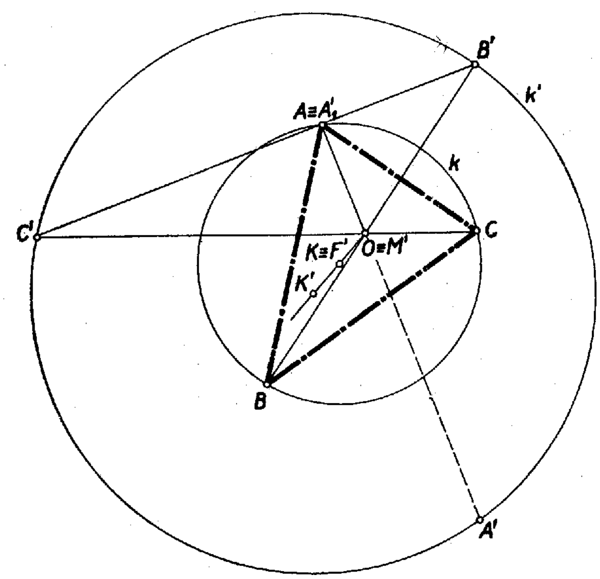
Megjegyzés: Az itt bizonyított tételt (mely szerint a háromszög köré írt kör két csúcspont közti ívének felezőpontja éppolyan távol van a két csúcsponttól, mint a háromszögbe írt kör középpontjától) lényegében tartalmazta az 1954. évi Arany Dániel versenyen kezdők részére kitűzött 1. feladat (lásd a K. M. L. IX. kötet, 2. sz. 1954. okt., 33. o.), de megtalálható a tétel a Matematikai Versenytételek I. részében is az 1897/2. feladathoz fűzött 2. jegyzetében (42. o.). Néhány versenyző hivatkozott is e forrásokra, de a megoldók zöme bizonyította e tételt.

A bizonyítás tulajdonképpen már az I. megoldásban megtörtént, amikor megmutattuk, hogy az $OB'AC'$ négyszög (1. ábra) deltoid, vagyis $B'A = B'O$, és $C'A = C'O$.

III. megoldás: Igen szép, szellemes megoldáshoz jutunk (bár nem a legegyszerűbbhöz), ha az előzőknél valamivel többet (Feuerbach-féle kör) használunk fel.

Tekintsük a keresett $ABC_\triangle$-et valamely $A'B'C'_\triangle$ talpponti háromszögének, akkor az adott K középpontú és r sugarú k kör az $A'B'C'_\triangle$ Feuerbach-féle köre ($K \equiv F'$). Ismeretes, hogy az $A'B'C'_\triangle$ magasságvonalai a talpponti háromszög szögfelezői, tehát az adott O pont azonos az $A'B'C'$ háromszög M' magasságpontjával, A pedig az A'-ból kiinduló magasságvonal A_1' talppontja. Ismeretes továbbá, hogy az $A'B'C'_\triangle$ k' körülírt köre nem egyéb, mint a k Feuerbach-féle körnek $1:2$ arányú kivetítése az $M'(\equiv O)$ centrumból.

Eszerint a szerkesztés menete: Az $O(\equiv M')$ pont tükörképe a $K(\equiv F')$ pontra nézve lesz az $A'B'C'_\triangle$ köré írt k' körnek K' középpontja (4. ábra).



4. ábra

K' körül $2\,r$ sugárral rajzolt kör a k' kör. Az $A(\equiv A_1')$ pontban $OA(\equiv M'A_1')$-ra emelt merőleges egyenes metszi ki a k'-ből a B' és C' pontokat. A $B'O(\equiv B'M')$ és $C'O(\equiv C'M')$ egyeneseknek a k körrel való, $O(\equiv M')$ ponton túl fekvő metszéspontjai a keresett B és C pontok.

IV. megoldás: Könnyen nyerhető egy szerkesztés, de távolról sem egyszerű szerkesztés, Euler egy tételén keresztül, melyet a versenyzők nagy része ismert és felhasznált, pl. a következő módon:

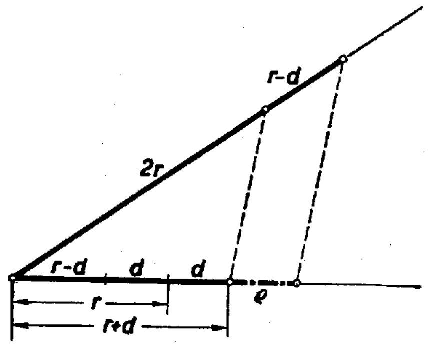
Ha az adott kör középpontja K, sugara r, a keresett ABC háromszögbe írt kör sugara ϱ, és $OK = d$, akkor Euler tétele szerint (lásd pl. Matematikai Versenytételek I. rész, 41. o.)

$$2r\varrho = r^2 - d^2 = (r+d)(r-d)$$

ahonnan

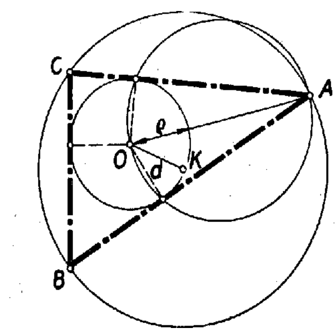
$$2r:(r+d)=(r-d):\varrho,$$

és így ϱ az adatokból negyedik arányosként könnyen megszerkeszthető (5. ábra).



5. ábra

Az A pontból az O körül ϱ sugárral rajzolt körhöz szerkesztett érintők metszik ki az adott körből a keresett B és C pontokat (6. ábra).



6. ábra

Az idézett helyen megtaláljuk annak bizonyítását is, hogy az Euler-összefüggés teljesülése esetén a kerület bármely A pontjából indulva ki a BC egyenes is érinti az O középpontú ϱ sugarú kört, tehát az ABC háromszög megfelel a feladat feltételeinek.

Mindig van egy és csakis egy megoldás, mert $2r>r+d$ miatt $r-d>\varrho$, és így a ϱ sugarú kör mindig az r sugarú kör belsejében van.[1]

Megjegyzés: E tétel különben, mint láthattuk (gyakorlati szempontból tekintve) elég körülményes szerkesztéshez vezet, még akkor is, ha negyedik arányosként szerkesztjük meg közvetlenül a ϱ-t. A megoldók legnagyobb része azonban ügyetlenebbül a $d^2=r(r-2\varrho)$ alakból, az adott d és r szakaszokból, a derékszögű háromszöggel kapcsolatos mértani középarányosság felhasználásával szerkesztette meg az $r-2\varrho$ szakaszt, amelyből $\dfrac{r-(r-2\varrho)}{2}$-ként kapta meg a ϱ-t.

[1] *Szerkesztő megjegyzése:* Számos versenyző – főleg lapunk olvasói – használta fel e tételt, amelyre lapunk a közelmúltban kétszer is (XIII. kötet 3. sz. 1956. november, 96. o., és XIII, kötet 5. sz. 1956. december 143. o.) hivatkozott. Kitűnik ebből, hogy a középiskolai matematikai irodalom ismerete kétségkívül előnyt jelent a versenyzőknek, amint erre lapunk állandóan rámutatott.

Jelen esetben azonban sem az Euler-tételre, sem a Feuerbach-féle körre nem volt szükség, hanem az I. gimnáziumban tanult egyszerű szögösszefüggések vezettek el a legegyszerűbb, legelegánsabb szerkesztéshez, amint azt az I. és II. megoldásban láttuk.