I. megoldás. A vizsgálandó kifejezés minden előírt n esetében csak véges számú, 0-tól különböző tagot tartalmaz. Ugyanis a $k+1$-edik [ ] jelben álló kifejezés

$$\frac{1}{2}+\frac{n}{2^{k+1}}$$

alakban írható, és ez pozitív valódi tört minden olyan k esetén, melyre

$$\frac{n}{2^{k+1}}<\frac{1}{2} \qquad \text{azaz ha} \qquad 2^k>n,$$

tehát egész része 0. (Ha a feltétel valamely egész k-ra teljesül, akkor minden további egész értékre teljesül, hiszen a 2^x függvény monoton nő:)

Jelöljük az összeget S_n-nel és tekintsük n néhány értékét.

$$S_1=\left[\frac{2}{2}\right]+\left[\frac{3}{4}\right] \qquad =1+0=1,$$

$$S_2=\left[\frac{3}{2}\right]+\left[\frac{4}{4}\right]+\left[\frac{6}{8}\right] \qquad =1+1+0=2,$$

$$S_3=\left[\frac{4}{2}\right]+\left[\frac{5}{4}\right]+\left[\frac{7}{8}\right] \qquad =2+1+0=3,$$

$$S_4=\left[\frac{5}{2}\right]+\left[\frac{6}{4}\right]+\left[\frac{8}{8}\right]+\left[\frac{12}{16}\right] \qquad =2+1+1+0=4,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S_{10}=\left[\frac{11}{2}\right]+\left[\frac{12}{4}\right]+\left[\frac{14}{8}\right]+\left[\frac{18}{16}\right]+\left[\frac{26}{32}\right]=5+3+1+1+0=10,$$

$$S_{11}=\left[\frac{12}{2}\right]+\left[\frac{13}{4}\right]+\left[\frac{15}{8}\right]+\left[\frac{19}{16}\right]+\left[\frac{27}{32}\right]=6+3+1+1+0=11,$$

$$S_{12}=\left[\frac{13}{2}\right]+\left[\frac{14}{4}\right]+\left[\frac{16}{8}\right]+\left[\frac{20}{16}\right]+\left[\frac{28}{32}\right]=6+3+2+1+0=12.$$

E példákban n-et 1-gyel -1-gyel növelve S_n-nek mindig egyetlen tagja nőtt 1-gyel, a többi változatlan maradt. Megmutatjuk, hogy ez minden esetben így van, ezáltal teljes indukció útján bizonyítjuk az $S_n=n$ összefüggést. Valóban,

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=\left[\frac{n+1+2^k}{2^{k+1}}\right],$$

ha $n+2^k$ és $n+1+2^k$ a 2^{k+1}-nek ugyanazon két többszöröse közé esik, az alsó határt megengedve, de a fölsőt nem. Ha viszont $n+1+2^k$ eléri 2^{k+1} következő többszörösét, tehát valamilyen m-re

$$n+1+2^k=(m+1)2^{k+1}, \qquad \text{azaz} \qquad n+1=(2m+1)2^k,$$

akkor

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=\left[\frac{(m+1)2^{k+1}-1}{2^{k+1}}\right]=m \quad \text{és} \quad \left[\frac{n+1+2^k}{2^{k+1}}\right]=\left[\frac{(m+1)2^{k+1}}{2^{k+1}}\right]=m+1.$$

Ilyen k minden egyes n-re csak egy van: ez az a kitevő, amire emelve 2-t, a hatvány még osztója $n+1$-nek, de a magasabb hatványok már nem. (Ha tehát $n+1$ páratlan, akkor $k=0$.)

Ezzel beláttuk, hogy

$$S_{n+1}-S_n=1, \quad \text{így} \quad S_n=S_1+n-1=n.$$

Megjegyzés. Mivel az $[(n+2^k)/2^{k+1}]$ tag azoknál az n-eknél nő 1-gyel, amelyek 2^k-nak páratlan többszörösei és $n=1\cdot 2^k$-nál 1 az értéke, így ez a tag az olyan, n-nél nem nagyobb számok számát adja, melyek oszthatók 2^k-nal, de 2 magasabb hatványával nem. Ezt nem nehéz közvetlenül igazolni, ami a fenti megoldásnak egy másik változatát adja.

II. megoldás. Bebizonyítjuk alább a következő azonosságot:

$$[2x]=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]. \tag{2}$$

Ezt ismételten alkalmazva, n így alakítható át:

$$n=[n]=\left[2\cdot\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right]=$$
$$=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\left[\frac{n}{8}\right]+\left[\frac{n}{8}+\frac{1}{2}\right];$$

és általában

(3) $$n=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{n+2^l}{2^{l+1}}\right]+\left[\frac{n}{2^{l+1}}\right].$$

Ezt $l=0,\ 1,\ 2$-re már láttuk és ha valamilyen l_0 értékre igaz, akkor (2)-t alkalmazva az utolsó tagra

$$n=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{n+2^{l_0}}{2^{l_0+1}}\right]+\left[\frac{n}{2^{l_0+1}}\right]=$$
$$=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{n+2^{l_0}}{2^{l_0+1}}\right]+\left[\frac{n}{2^{l_0+2}}\right]+\left[\frac{n}{2^{l_0+2}}+\frac{1}{2}\right]=$$
$$=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{n+2^{l_0}}{2^{l_0+1}}\right]+\left[\frac{n+2^{l_0+1}}{2^{l_0+2}}\right]+\left[\frac{n}{2^{l_0+2}}\right].$$

(3) tehát $l=l_0+1$-re is fennáll. Ha l-et akkorára választjuk, hogy $2^{l+1}>n$ legyen, akkor az utolsó tag értéke 0, s így az (1) összeg értékére kapjuk, hogy az n.

A felhasznált (2) azonosság bizonyítását két esetre választjuk szét. Ha

$$[x]\le x<[x]+\frac{1}{2},\quad \text{akkor}\quad [x]<[x]+\frac{1}{2}\leqq x+\frac{1}{2}<[x]+1,$$

tehát

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x],\quad \text{és így}\quad [x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=2[x]\le 2x<2[x]+1,$$

amiből

$$[2x]=2[x]=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right].$$

Ha pedig

$$[x]+\frac{1}{2}\le x<[x]+1,\quad \text{akkor}\quad [x]+1\le x+\frac{1}{2}<[x]+\frac{3}{2}[x]+2,$$

tehát

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x]+1,\quad \text{és így}\quad [x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=2[x]+1\le 2x<2[x]+2,$$

amiből ismét

$$[2x]=2[x]+1=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right].$$

Megjegyzések. 1. A bizonyítás (3)-at valamivel általánosabban, tetszőleges pozitív n-re adja, ha a bal oldalon n helyére $[n]$-ét írunk, s így az (1) összeg is tetszőleges pozitív n-re $[n]$-ét adja.

2. A (2) azonosságnak és a látott megoldás alapján (1)-nek konkrét tartalmát látjuk a következő probléma megválaszolásában.

Játsszék bizonyos számú versenyző – pl. pingpongozó – a szokásos módon kieséses versenyt, vagyis kettesével játszanak egymás ellen, minden párból a nyertes jut a második fordulóba, továbbá játék nélkül a pár nélkül maradt versenyző – amennyiben ilyen van, ti. ha az indulók száma páratlan; ugyanígy alakul ki a 3., a 4., … forduló mezőnye, végül az nyeri a bajnoki érmet, aki veretlenül marad. Tegyük még fel, hogy minden vesztes vigaszdíjként megkapja a mérkőzésén használt pingponglabdát. – Kérdés: hány mérkőzés folyik le, más szóval hány labda kerül kiadásra az egyes fordulókban?

Bármelyik forduló indulóinak számát v-vel jelölve a fordulóban $\left[\frac{v}{2}\right]$ mérkőzés folyik le. Ennyi a továbbjutók száma is, ha v páros ; ha pedig pártatlan, akkor 1-gyel több. Számuk v párosságától függetlenül $\left[\frac{v}{2}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{v+1}{2}\right]$ alakban írható, eszerint a (2)-nek megfelelő

$$v=\left[\frac{v}{2}\right]+\left[\frac{v+1}{2}\right]$$

azonosság azt fejezi ki, hogy minden versenyző vagy kiesik, vagy továbbjut. Másrészt az egész verseny folyamán 1-gyel kevesebb labdát adnak ki, mint az indulók száma, hiszen a bajnok kivételével mindenki kiesik előbb-utóbb. A kiadandó labdák számát n-nel jelölve az első forduló indulóinak, kiesőinek és továbbjutóinak száma rendre

$$n+1, \qquad \left[\frac{n+1}{2}\right], \qquad \left[\frac{n+2}{2}\right],$$

a másodikban kiesők, ill. a továbbjutók) száma

$$\left[\frac{\left[\frac{n+2}{2}\right]}{2}\right] = \left[\frac{n+2}{2^2}\right], \qquad \text{ill.} \qquad \left[\frac{\left[\frac{n+2}{2}+1\right]}{2}\right] = \left[\frac{n+2}{2^2}\right],$$

könnyű ugyanis belátni, hogy ha a, b, c természetes számok, akkor

$$\left[\frac{\left[\frac{a}{b}\right]}{c}\right] = \left[\frac{a}{bc}\right] \qquad \text{és} \qquad \left[\frac{a}{b}\right] + c = \left[\frac{a}{b} + c\right].$$

Általában a k-adik fordulóból továbbjutott $\left[\frac{n+2^k}{2^k}\right]$ versenyző közül labdát kap, ill. továbbjut

$$\left[\frac{\left[\frac{n+2^k}{2^k}\right]}{2}\right] = \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right], \qquad \text{ill.} \qquad \left[\frac{\left[\frac{n+2^k}{2^k}+1\right]}{2}\right] = \left[\frac{n+2^{k+1}}{2^{k+1}}\right],$$

tehát (1) tagjai az egymás utáni fordulókban kiadott labdák számát adják, összegük pedig n-et, az összes labdák számát.