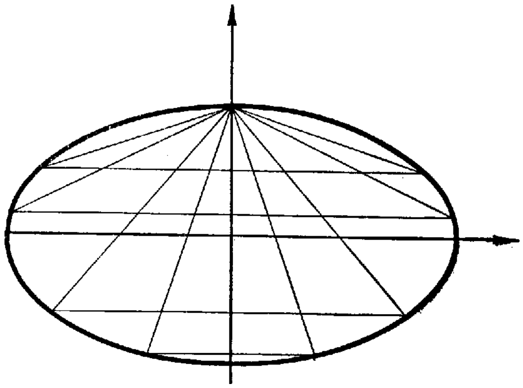
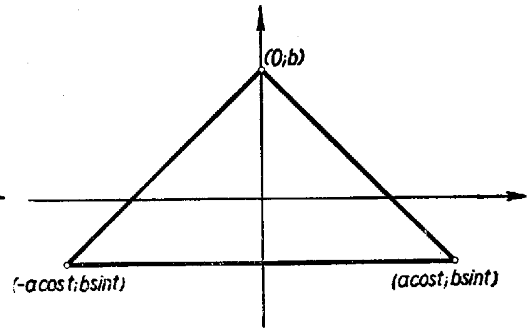
Szélsőértékfeladatok általában a differenciálszámítás segítségével oldhatók meg. Ez azonban jelenleg nem anyaga a középiskolának. Néhány példát szeretnénk mutatni arra, hogy sokszor reménytelennek látszó szélsőértékfeladatok mégis megoldhatók a differenciálszámítás nélkül is, tehát elemi úton.

1. Adva van egy a, b féltengelyű ellipszis. Írjunk bele olyan háromszögeket, melyeknek egyik csúcsa a kistengely végpontja, a szembenfekvő oldal pedig a nagytengellyel párhuzamos. Melyik közülük a legnagyobb területű? (1. ábra)



1. ábra



2. ábra

Tudjuk (lásd a III. gimn. tankönyv 1953. 247. old.), hogy az ellipszis megadható a következő paraméteres egyenletrendszerrel:

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t \qquad (-\pi \leq t < \pi).$$

Így a 2. ábra szerint a fölrajzolt háromszög kerülete:

(1) $$T = a\cos t(b - b\sin t) = ab\cos t(1 - \sin t).$$

A T függvénye t-nek. Az értelmezési tartomány

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Nyilvánvalóan tekinthetjük a $\left(\frac{T}{ab}\right)^2$ függvényt, ennek ugyanazon a helyen van szélsőértéke mint T-nek, hiszen T a jelzett intervallumban nem negatív, tehát:

(2) $$y = \left(\frac{T}{ab}\right)^2 = \cos^2 t(1 - \sin t)^2 = (1 - \sin^2 t)(1 - \sin t)^2$$

Ennek a komplikált trigonometriai függvénynek kell már most a szélsőértékét (jelen esetben a maximumát) meghatározni. Bontsuk fel tényezőkre:

(3) $$y = (1 - \sin t)(1 + \sin t)(1 - \sin t)(1 - \sin t),$$

szorozzuk meg a függvényt egyelőre határozatlan m és n pozitív konstansokkal, ekkor nyerjük a

(4) $$z = mny = m(1 - \sin t)n(1 + \sin t)(1 - \sin t)(1 - \sin t).$$

A z függvény maximumának meghatározása már sikerülni fog. (Nyilván az y maximuma ugyanott van.) A négy tényező összege ugyanis

(5) $$(n - m - 2)\sin t + m + n + 2.$$

Ez az összeg t-től független, ha

(6) $$n = m + 2.$$

Viszont a számtani és a mértani közép relációjából tudjuk, hogy amennyiben egy összeg, mely pozitív mennyiségekből áll, állandó, a tagok szorzata akkor a legnagyobb, ha mind egyenlők, tehát jelenleg, ha

(7) $$m(1 - \sin t) = 1 - \sin t, \qquad n(1 + \sin t) = 1 - \sin t.$$

(7)-ből és (6)-ból

$$m = 1, \qquad n = \frac{1-\sin t}{1+\sin t} = 3$$

következik. Ez utóbbiból

$$4\sin t = -2, \qquad \sin t = -\frac{1}{2}, \qquad \text{és így } t = -30^\circ.$$

A keresett maximális területű háromszög csúcspontjai tehát

$$(0;b), \qquad \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{b}{2}\right) \quad \text{és} \quad \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{b}{2}\right).$$

Számítsuk ki a maximum nagyságát is:

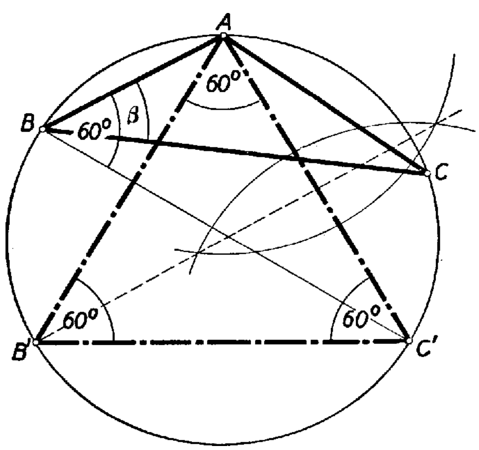
$$T_{max} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3b}{2} = ab\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Az ellipszis területe $ab\pi$ lévén, a két terület aránya

$$\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \sim 0{,}413.$$

Megjegyezzük, hogy ebben a feladatban egyszerűbben is célhoz juthatunk a kör és ellipszis közötti affinitás felhasználásával.

Először is könnyű belátni, hogy egy adott körbe írt háromszögek közül a szabályos háromszög a legnagyobb területű. Tekintsünk ugyanis egy körbe írt ABC háromszöget, amelynek nincs 60°-os szöge (3. ábra).



3. ábra

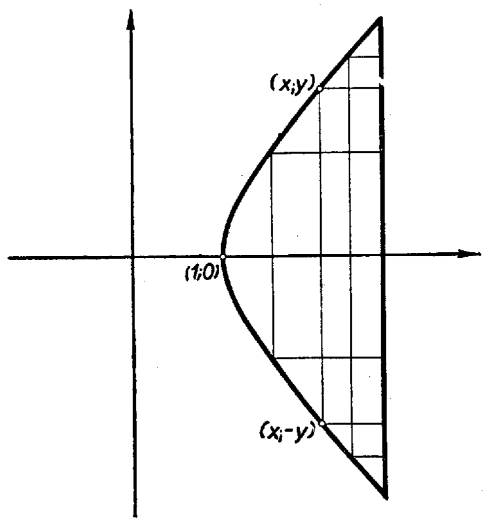
Ennek legalább egyik szöge pl. a β szöge kisebb 60°-nál. Ha a β szöget alkotó kisebb oldalt (ábránkban az AB-t) rögzítjük, és a C csúcspontot a körön eltoljuk, amíg BC' az AB oldallal 60°-os szöget zár be, akkor az így nyert $ABC'_\triangle$ területe nagyobb, mint az $ABC_\triangle$ területe, mert a közös AB oldalhoz tartozó magasság az előbbiben nagyobb mint az utóbbiban, lévén $BA < BC$, és az $\overset{\frown}{AC} < \overset{\frown}{AC'} = 120^\circ$. Ha az $ABC'_\triangle$-ben az AC' oldalt rögzítjük, és a B pontot a körön eltoljuk B'-be úgy, hogy B' az AC' oldalt merőlegesen felező egyenesbe essék, akkor a $B'A = B'C'$, és így az $AC'B$ egyenlőszárú háromszögben az AC' alapnál felvett szögek egyenlők, és mivel a B'-nél fekvő szög, mint kerületi szög, 60°-os, azért az A és C' csúcsokban fekvő szögek is 60°-osak, vagyis az $AB'C'_\triangle$ szabályos, és azonfelül az $AB'C'_\triangle$ területe nagyobb mint az $ABC'_\triangle$ területe, mert a közös AC' oldalhoz tartozó magasság nagyobb az előbbiben mint az utóbbiban.

Tehát *bármelyik,* körbe írt, háromszögről, amelynek nem minden szöge 60°-os, legfeljebb két lépésben kimutatható, hogy területe ***kisebb*** a körbe írt ***szabályos*** háromszög területénél.

Ismeretes, hogy valamely síkidom területe és az affin idom területének aránya állandó (jelen esetben ez közvetlenül leolvasható). Tehát, ha valamelyik síkidom területe a körrendszerben maximális, akkor a megfelelő idom területe az ellipszis rendszerben is maximális. Ha az ellipszis főkörébe írunk szabályos háromszöget, melynek egyik csúcsa a $(0;a)$ pont, akkor a szembenfekvő oldal felezi a $(0;\,0)$, $(0;\,-a)$ végpontú főkörsugárt, és így az affinháromszög egyik csúcspontja a $(0;b)$, és e ponttal szemközti oldal felezi a $(0;\,0)$, $(0;\,-b)$ végpontú ellipszis féltengelyt. Tehát a maximális területű háromszög másik két csúcspontja:

$$\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{b}{2}\right), \quad \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{b}{2}\right).$$

2. Tekintsük az $x^2 - y^2 = 1$ egyenlő oldalú hiperbola $x > 0$ ágát, melynek az $x = a > 1$ egyenessel levágott szegmentumába téglalapokat írunk, melynek középvonala az x tengelyre esik (4. ábra).



4. ábra

E téglalapok közül melyiknek a területe a legnagyobb?
Nyilván

$$T = 2y(a-x) = 2\sqrt{x^2-1}(a-x). \tag{8}$$

Tekintve az $y = \left(\frac{T}{2}\right)^2$ függvényt

$$y = (x-1)(x+1)(a-x)(a-x).$$

A négy tényezős szorzat maximumának kiszámítását kíséreljük meg az előbbi módszerrel. Az első tényezőt m-mel, a másodikat n-nel szorozva, a tényezők összegéből akkor esik ki x, ha

$$m + n - 2 = 0, \tag{9}$$

és akkor lesz még egyenlő is a négy tényező, ha

$$m \cdot (x-1) = a - x, \qquad n \cdot (x+1) = a - x. \tag{10}$$

(10)-ből m-et és n-et (9)-be helyettesítve

$$\frac{a-x}{x+1} + \frac{a-x}{x-1} - 2 = 0,$$

azaz

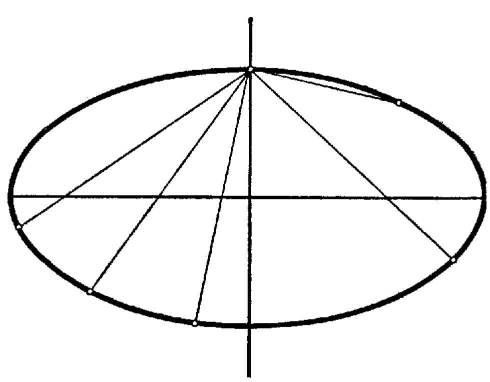
$$2x^2 - ax - 1 = 0,$$

ahonnan

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2+8}}{4}.$$

Ezen a helyen van maximum. Ezen értéket (8)-ba helyettesítve, megkapjuk T maximális értékét.

3. Igen érdekes feladat a következő. Az ellipszis mely pontja van a kis tengely végpontjától a legnagyobb távolságra? (5. ábra)



5. ábra

Ismét az első feladatbeli paraméteres egyenletrendszert használva, és mindjárt a d távolság négyzetet tekintve

$$f(t) = d^2 = a^2\cos^2 t + (b\sin t - b)^2 = a^2(1-\sin^2 t) + b^2(\sin t - 1)^2 =$$
$$= (b^2 - a^2)\sin^2 t - 2b^2\sin t + a^2 + b^2.$$

Mint ismeretes $a^2 - b^2 = c^2$, ahol c a lineáris excentricitás.

Tehát

$$f(t) = -c^2\sin^2 t - 2b^2\sin t + a^2 + b^2 = 0.$$

Ez $\sin t$-ben másodfokú függvény, amelynek az ismeretes képlet szerint

$$\sin t = -\frac{b^2}{c^2}$$

helyen van maximuma.

Itt 3 esetet kell megkülönböztetni.

1. eset: $b > c$, akkor

$$\sin t = -\frac{b^2}{c^2} < -1,$$

és így ilyen t érték nincs. Maga a függvény az értelmezési tartományban folyton csökken, s így legnagyobb az értéke az intervallum elején $-\frac{\pi}{2}$-nél, ahol

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = d^2 = -c^2 + 2b^2 + a^2 + b^2 = 4b^2,$$

tehát

$$d_{max} = 2b,$$

azaz a kistengely másik végpontja van a legtávolabb.

2. eset: $b = c$, ekkor

$$\sin t = -1 \qquad \text{vagyis} \qquad t = -\frac{\pi}{2}.$$

Ez tehát ugyanarra az eredményre vezet, mint az 1. eset.

3. eset: $b < c$. Most létezik olyan t, melyre

$$\sin t = -\frac{b^2}{c^2},$$

és erre lesz függvényünknek maximuma. Számítsuk ki mekkora ez:

$$f_{max} = d_{max}^2 = -c^2\frac{b^4}{c^4} + \frac{2b^4}{c^2} + a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + \frac{b^4}{c^2} =$$
$$= \frac{a^2c^2 + b^2(c^2 + b^2)}{c^2} = \frac{a^2c^2 + a^2b^2}{c^2} = \frac{a^4}{c^2},$$

ahonnan

$$d_{max} = \frac{a^2}{c}.$$

Tehát a mértani középarányos c és d_{max} között.

Ugyanez a feladat érdekes módon megoldható egészen más gondolatmenettel is. (Lásd a jelen számban kitűzött 820. feladatot.)