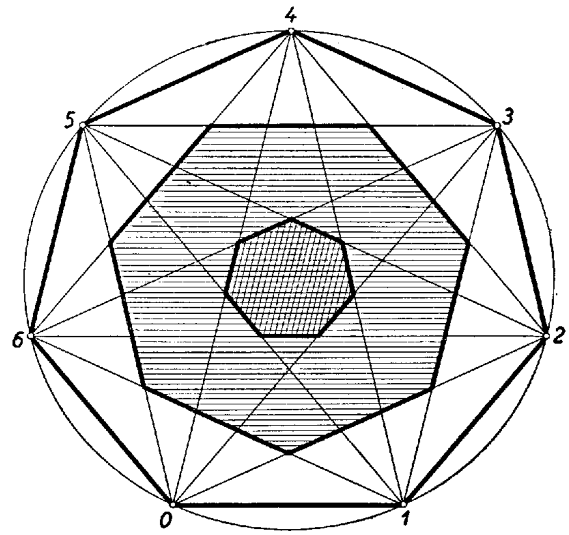
(2. befejező közlemény)

Most rátérek Rados elemi geometriai dolgozatainak ismertetésére.

Ha adva van n pont a síkban, kössük őket minden lehetséges módon össze, amint az ($n = 7$ esetére) az 1. ábrán látható, akkor az ismert – legkülső –sokszögön kívül az átlók is meghatároznak egy vagy több n-szöget. Ezeket alakjuk miatt *csillagsokszögek*nek nevezzük.



1. ábra

A csillagsokszög, amint neve is mutatja, geometriai fogalom, de pontosan definiálni csak egy fontos számelméleti fogalom segítségével lehet. Nevezzük az n pozitív egész számnál kisebb, és hozzá relatív prím pozitív egész számok számát $\varphi(n)$-nek. Ha tehát pl. $n = 10$, akkor a nála kisebb és hozzá relatív prím pozitív egész számok 1, 3, 7, 9. Összesen 4 ilyen van, tehát $\varphi(10) = 4$. Azonnal belátható, hogy ha n valamely p törzsszámmal egyenlő, akkor

$$\varphi(p) = p - 1,$$

hiszen a törzsszám minden, nála kisebb egész számhoz relatív prím. Hátha valamely p törzsszám hatványa? Nyomban látható, hogy p^k-val közös osztója csak a p-vel osztható számoknak van, ezek

$$p, 2p, 3p, \ldots, p^{k-1}p,$$

ennélfogva

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

A $\varphi(n)$ függvény csak pozitív egész számokra van értelmezve; az ilyen függvényeket számelméleti függvényeknek nevezzük. A $\varphi(n)$ számelméleti függvény nevezetes sajátsága, amit itt csak bizonyítás nélkül közlünk, ha m és n relatív prím számok, akkor

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Ennek alapján könnyű bármely n számra $\varphi(n)$ meghatározása, ha n törzstényezőre való felbontását ismerjük. Ha

$$n = p_1^{k1} p_2^{k2} \cdots p_r^{kr},$$

ahol p_1, p_2, $\ldots$, p_r különböző prímszámok, akkor

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \varphi(p_1^{k1})\varphi(p_2^{k2})\ldots\varphi(p_r^{kr}) = \\ &= p_1^{k_1}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)p_2^{k_2}\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots p_r^{k_r}\left(1 - \frac{1}{p_r}\right) = \\ &= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right),\end{aligned}$$

hiszen két különböző prím szám mindig relatív prím.

E kis számelméleti kitérés után visszatérünk a geometriai feladatra.

Ha a kör kerületét a

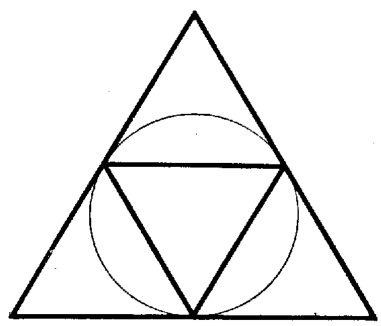
$$0, 1, 2, \ldots, n - 1$$

számokkal jelzett n egyenlő részre osztják, szabályos n-szöget határoznak meg, ha azonban ezeket a pontokat minden lehetséges módon összekötjük, nemcsak egy, hanem $\frac{\varphi(n)}{2}$ számú szabályos sokszöget kapunk, amint ezt $n = 7$ esetében az 1. ábra mutatja. Az „átlók"-kal meghatározott, az ábrán kisraffozott sokszögeket hívjuk *csillagsokszögek*nek, ábránkon a három szabályos hétszög

(5) $$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6; \qquad 0\ 2\ 4\ 6\ 1\ 3\ 5; \qquad 0\ 3\ 6\ 2\ 5\ 1\ 4.$$

A $0k$ húr ugyanis egy szabályos n-szög oldala, ha $(k, n) = 1$, de mivel a $0k$ és $0\overline{n-k}$ húrok ugyanazt a sokszöget határozzák meg, azért számuk, amint már említettük, $\frac{\varphi(n)}{2}$. Az (5) sorozatban tehát az első az ismert közönséges, szabályos sokszög, a másik kettő pedig a csillagsokszög. Maga a csillagsokszög egy, az adottal koncentrikus kör körül írt érintősokszög, mert a $0k$ húrok egy-egy kör érintői. Radoss[1] a következő kérdésből indul ki: *Osszuk fel a kör kerületét* 3 *egyenlő részre, akkor,* amint az a 2. ábráról közvetlenül leolvasható, *a beírt és a körülírt háromszög területeinek aránya*

$$\frac{1}{4}.$$



2. ábra

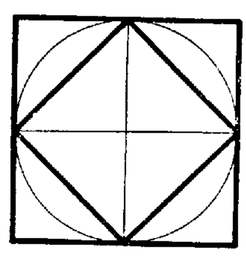
Ez racionális szám. Ha I_3 jelenti a beírt, C_3 a körülírt szabályos háromszög területét – és általában I_n a beírt és C_n a körülírt szabályos n-szög területét – akkor

$$\frac{I_3}{C_3} = \frac{1}{4}.$$

A beírt és körülírt négyzetek területeinek arányára is hasonló tétel érvényes, mert, amint ez a 3. ábrából közvetlenül világos

$$\frac{I_4}{C_4} = \frac{1}{2},$$

tehát szintén racionális.



3. ábra

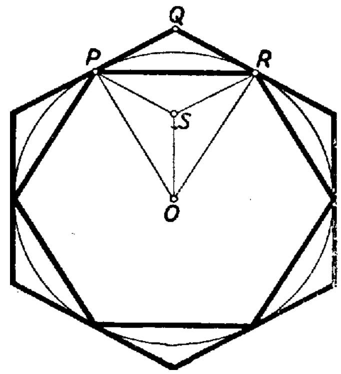
A szabályos hatszögre

$$\frac{I_6}{C_6} = \frac{3}{4}$$

szintén racionális, de ennek bizonyítása valamivel bonyolultabb (4. ábra).

[1]RADOS G.: Adalék a szabályos sokszögek elméletéhez. *Math. és Termtud. Ért.* 22., 1904. 66–68 old. – Beitrag zur Theorie der regulären Vielecke. *Math. u. natw. Berichte aus Ungarn,* 22. 1904. 1–12. old. – Ugyanez franciául: Rados G.: Contribution a la théorie des polygones réguliers. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.* 49., 1925. 1–4. old.

A tételt azonban már ezen közlései előtt ismerte. E sorok írója az 1900/01 tanévben hallgatta Rados számelméleti előadását, melyben a csillagsokszögekről szóló, a szövegben tárgyalt tételeket is előadta.



4. ábra

Legyen O a kör középpontja, PR a beírt hatszög valamely oldala és Q a körülírt hatszögnek P és R közé eső csúcsa, az OPR egyenlőoldalú háromszög középpontja S. Minthogy az OS, PS, RS egyenesek egyszersmind szögfelezők, azért az $OPQR$ négyszög a négy egybevágó PQR, PSO, RSO, PRS háromszögekre bomlik szét. Ennélfogva

$$\frac{1}{6}I_6 = 3PRS \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{6}C_6 = 4PRS,$$

és ebből következik a fenti egyenlőség.

Ha azonban a kör kerületét 5, 7, 8, 9, 10, ... egyenlő részre osztjuk, ez az arány sohasem racionális. Radosnak mégis sikerült általánosítani a 3, 4, és 6-szög esetében fennálló tételt a következő módon:

Ha a körbe írt $\dfrac{\varphi(n)}{2}$ *számú szabályos sokszög területeinek összege* I_n, *és a kör körül írt szabályos* n *oldalú sokszög területe* C_n, *akkor az* $\dfrac{\mathrm{I}_c}{\mathrm{C}_n}$ *hányados mindig racionális és értéke*

$$\frac{I_n}{C_n} = \frac{\varphi(n) + \varepsilon_n}{4}$$

ahol ε_n egyenlő 0-val, ha n-nek van az 1-től különböző teljes négyzet osztója; ha nincs, akkor ε_n egyenlő $+1$ vagy -1, aszerint, amint n különböző prím számtényezőinek száma páros vagy páratlan.

Az eddigi 3, 4, 6-ra bizonyított tételek csakugyan ennek a tételnek speciális esetei, mert $\varphi(n)$ mindhárom esetben 2, így csak egy-egy szabályos sokszög van, továbbá $\varepsilon_3 = -1$, $\varepsilon_4 = 0$, $\varepsilon_6 = +1$, és így $\dfrac{\varphi(n) + \varepsilon_n}{4}$, a kívánt $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{4}$ értékeket adja.

Rados tételének bizonyítása aránylag elemi, és főleg a figyelembe veendő területek meghatározásából áll, ami elemi trigonometriai úton lehetséges, de egy lényeges helyen igénybe vett felsőbb segédeszközöket, úgy, hogy ismertetésétől el kell tekintenem.

Rados még egy további dolgozatában[2] foglalkozik a szabályos sokszögekkel. Itt is a 3, 4, és 6 oldalú sokszögön tapasztalt törvényszerűséget, terjeszti ki szellemesen, a csillagsokszögek segítségével tetszőleges oldalú szabályos sokszögre.

Az egységsugarú, körbeírt szabályos n-szög oldalát a_n-nel jelölve, amint azt jót tudjuk,

$$a_3 = 2\sin\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2} = 3^{\frac{1}{2}}, \qquad a_4 = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} = 2^{\frac{1}{2}},$$
$$a_6 = 2\sin\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

Eszerint

$$a_3^2 = 3, \qquad a_4^2 = 2, \qquad \text{míg} \qquad a_6^2 = 1.$$

Szabályos 5-, 8- és 12-szögre már nem adódik ilyen egyszerű eredmény:

$$a_5^2 = \frac{5^{\frac{1}{2}}(5^{\frac{1}{2}} - 1)}{2}, \qquad a_8^2 = 2 - 2^{\frac{1}{2}}, \qquad a_{12}^2 = 2 - 3^{\frac{1}{2}},$$

Rados azonban ügyes fordulattal számbaveszi a csillagsokszögeket is. Ezekből 5, 8 és 12 oldalú csak egy-egy van. Ezek a_5', a_8', ill. a_{12}' oldalaira

$${a_5'}^2 = \frac{5^{\frac{1}{2}}(5^{\frac{1}{2}} + 1)}{2}, \qquad {a_8'}^2 = 2 + 2^{\frac{1}{2}}, \qquad {a_{12}'}^2 = 2 + 3^{\frac{1}{2}},$$

[2]RADOS G. Adalék a szabályos sokszögek elméletéhez. *Math. és Termtud. Ért.* 41., 1924., 109–114. old. – Contribution a la théorie des polygones réguliers. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 49., 1925. 1–4. old. főleg a 3. és 4. oldalán.

és így

$$(a_5 a_5')^2 = 5, \qquad (a_8 a_8')^2 = 2, \qquad (a_{12} a_{12}')^2 = 1.$$

Ebből Rados a következő általános tételt olvassa le, és be is bizonyítja:

Az egységkörbe írható különböző szabályos n*-szögek (betudva a csillagsokszögeket is) oldalai mérőszámainak négyzetével alkotott szorzat* p*-vel egyenlő, ha* p *az egyetlen prímszám, amellyel* n *osztható és* 1*-gyel egyenlő, ha* n *egynél több prímszámmal osztható.*

A bizonyítás ismertetésére itt szintén nem térek ki.

Rados egész elemi geometriai problémákkal is foglalkozott. Õ is adott például egy bizonyítást[3] arra az ismert tételre, hogy a hegyesszögű háromszögbe beírt háromszögek közül (amelyeknek egy-egy csúcsa az adott háromszög egy-egy oldalán van) a magassági talppontok háromszögének van a legkisebb kerülete.

Teljesen az elemi analitikus geometriához tartozik Radosnak a következő öregkori vizsgálata a kör egyenletéről.[4] Ha 3 pont $p_i (i = 1, 2, 3)$ koordinátái x_i, y_i, akkor könnyen látható, (a bizonyítást az olvasóra bízom), a 3 ponton átmenő kör egyenlete a következő alakban írható:

$$k(x,y) = \begin{vmatrix} x^2+y^2, & x, & y, & 1 \\ x_1^2+y_1^2, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^2+y_2^2, & x_2, & y_2, & 1 \\ x_3^2+y_3^2, & x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

hacsak a $k(x, y)$ determináns első sorának elemeihez tartozó aldeterminánsak nem mindannyian a 0-sal egyenlők, amikor az egyenlet a semmitmondó

$$0 = 0$$

azonosságba megy át. Rados kimutatja, hogy *ez az eset akkor és csak akkor következik be, amikor a kör meghatározására megadott 3 pont közül legalább kettő összeesik, minden egyéb esetben (6) valóságos egyenlet.*

A bizonyítást bemutatom, hasznos gyakorlat lesz a determinánsokkal való számolásban.

Ha a $k(x, y)$ determináns első sorához tartozó aldeterminánsok mindannyian 0-sal egyenlők, akkor persze az első sor első eleméhez tartozó aldetermináns is 0, tehát

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ez geometriailag azt jelenti, hogy a három P_i pont ugyanazon az egyenesen fekszik.

Ha a három pont egybeesik, nincs mit bizonyítanunk, ha van köztük két különböző, akkor a kérdéses egyenesnek egyenlete $ax + by + c = 0$ alakú, ahol a és b közül legalább az egyik nem 0. Ha pl. $b \neq 0$, akkor az egyenlet a

$$y = mx + b \tag{7}$$

alakban is írható. (Ha $b = 0$, akkor csak x és y szerepét kell megcserélni.)

Mivel (6)-ban az első sor minden eleméhez tartozó aldetermináns, így a harmadik elemhez tartozó is, vagyis – tekintetbe véve, hogy a P_i pontok koordinátái kielégítik a (7) egyenletet – azt kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2, & x_1, & 1 \\ x_2^2+y_2^2, & x_2, & 1 \\ x_3^2+y_3^2, & x_3, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^2+m^2x_1^2+2\,mb\,x_1+b^2, & x_1, & 1 \\ x_2^2+m^2x_2^2+2\,mb\,x_2+b^2, & x_2, & 1 \\ x_3^2+m^2x_3^2+2\,mb\,x_3+b^2, & x_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

vonjuk le a második oszlop. $2mb$-szeresét és a harmadik b^2-szeresét az elsőből. Tudjuk, hogy ezáltal a determináns értéke nem változik. Ekkor az első oszlop minden elemében szereplő $m^2 + 1$ tényező a determináns elé kiemelhetjük, és azt kapjuk, hogy

$$(m^2+1) \begin{vmatrix} x_1^2, & x_1, & 1 \\ x_2^2, & x_2, & 1 \\ x_3^2, & x_3, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ami csak úgy lehet, ha a determináns értéke 0. A determináns azonban $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ alakban is írható. (A bizonyítást az olvasóra bízom.) Így a fenti összefüggés azt jelenti, hogy van a pontok között kettő, amelynek az abszcisszája egyenlő. Mivel pedig mindkettő koordinátási kielégítik a (7) egyenletet, ezért ordinátáik is megegyeznek, s így a két pont egybeesik. Ezt kellett bizonyítanunk.

---

[3]RADOS G.: Egy minimum-probléma elemi tárgyalása. *Math. és Phys. Lapok* 2., 1893. 109–117. old. – Ld. még a következő cikket: BERKES JENŐ: A talpponti háromszögről. Lapunk XII., 1956. 66–72. old.

[4]RADOS G.: Három pontjával meghatározott kör és négy pontjával meghatározott gömb egyenletéről. *Mat. Termtud. Ért.* 60., 1941., 1–8. old.

Rados hasonló tételt mond ki és bizonyít be a gömbre is. További eredményei közül még csak egyet említek[5]. A

$$T_n(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots$$
$$\dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

alakú kifejezéseket trigonometrikus polinomoknak nevezzük. Rados róluk a következő tételt bizonyította be.

Ha az

$$\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{n},$$
$$\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \dots, \mathrm{b}_\mathrm{n}$$

együtthatók mindannyian egész számok, ha továbbá a

$$T_n(x) = 0$$

*trigonometrikus egyenlet összes gyökei valós számok, akkor ezek mindannyian a π-nek (*Ludolf*-féle szám) racionális többszörösei* (a szöget ívmértékben mérve).

Radosnak a felemlítetteken kívül is számos dolgozata van, de tárgyuk kívül esik ifjú olvasóink érdeklődési körén.

*

Az eddigiekben mindig csak a matematikusról volt szó, aki még késő aggkorában is dolgozott; bemutatott analitikus geometriai tételét a kör és gömb egyenletéről 79 éves korában közölte. A róla alkotott kép nem lenne teljes, ha meg nem emlékeznénk tudományos életünkben betöltött szerepéről, szervező képességeiről és a kiváló tanárról. Nagy tekintélyét ismételten felhasználta arra, hogy a mindinkább terpeszkedő fasizmus tudományellenes intézkedései ellen tiltakozzék, pl. az ún. „zsidótörvény” ellen a magyar értelmiség színe-java tiltakozott, a nyilatkozat aláírói között találjuk Rados Gusztávot is. Mint a Matematikai és Fizikai Társulat elnöke szinte tüntetésképpen választtatta meg a mind jobban térthódító fasizmus elől külföldre távozott két fiatal elsőrangú magyar matematikust (Radó Tibort az Ohio állambeli Columbus egyetem és Neumann Jánost, a hírneves princetoni egyetem világhírű tanárait) a Társulat tiszteletbeli tagjainak.

Szólnom kell még a nagyszerű tanárról. Említettem már, hogy egész pályafutása alatt mint a műegyetem tanára működött. Világos, jól érthető előadása a hallgatóság sorában igen kedvelt volt, és nagyban hozzájárult a matematika népszerűsítéséhez a magyar mérnöki karban, egyben jelentékenyen emelte a mérnökök tudományos színvonalát. A mai idősebb mérnöknemzedék (az építészek és vegyészek kivételével) mind az ő tanítványa volt. Az idősebb középiskolai matematikai tanárok is tőle tanulták a számelmélet és a funkcionális algebra elemeit. Meg vagyok győződve, hogy minden volt tanítványa – számuk tízezrekre rúg – szeretettel gondol rá.

Rados Gusztávban tehát az akkor virágzóban levő matematikai élet egyik kiváló egyéniségével ismerkedtünk meg.

[5] RADOS G.: Egész együtthatós trigonometrikus polynomok egy nevezetes tulajdonsága. *Math. és Phys. Lapok* 28., 1922., 27–29. old. – Ugyanez franciául: Sur une propriété remarquable des polynomes trigonométriques a coefficients entiers. *Rendiconti del Corcolo Matematico di Palermo.* 47., 1923., 62–64. old.