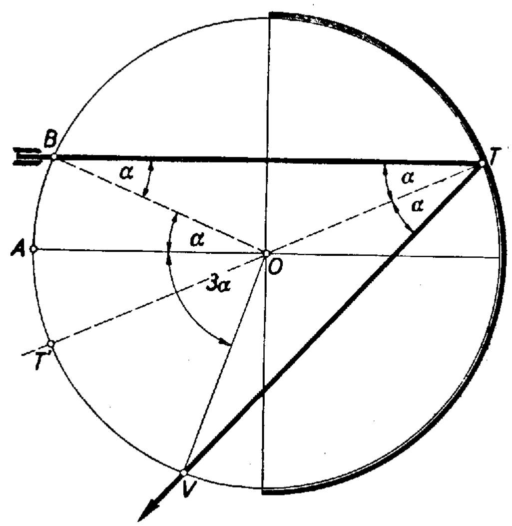
Olyan görbéről lesz szó, amelyet bizonyos tükrökről visszaverődő fénysugarak alakítanak ki. Tudjuk, hogy sík, tükröző felületre eső fény úgy verődik vissza, hogy a beeső és visszaverődő sugár egyenlő szöget zár be a beesési merőlegessel. Beesési merőlegesen a beesés pontjában a tükör síkjára emelt merőlegest értjük. Ez, továbbá a beeső és visszavert sugár egy síkban van. Ha a tükröző felület görbült, akkor a visszaverődés úgy történik, mintha a beesés pontjában a tükröző felülethez fektetett érintő síkon jönne létre a visszaverődés.

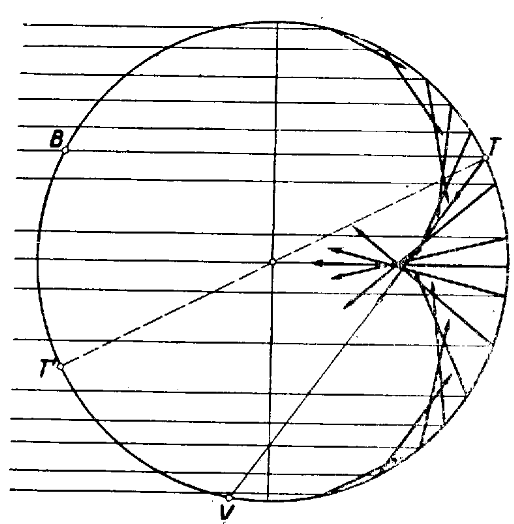
Tekintsünk egy gömbtükröt, éspedig egy félgömb belső felülete legyen a tükröző felület. A beesési merőleges most mindig a fénysugár beesési pontjához tartozó gömbi sugár lesz. Legyen a fénysugár a fél gömb tengelyével párhuzamos (a félgömböt határoló főkör síkjára merőleges). A visszavert fénysugár a beeső fénysugárhoz tartozó főkör síkjában lesz. Ezt a főkört, a beeső és visszavert fénysugarat rajzoltuk meg az 1. ábrán.



1. ábra

A fénysugár beesési pontja T, a beesési merőleges OT. A félgömb tengelye az A, a beeső fénysugár a B, a visszavert fénysugár a V, a beesési merőleges a T'pontban metszi a főkör nem tükröző részét. Mivel a beeső és visszaverődő sugár ugyanazt az α szöget zárja be, az OT-vel, azért $TB = TV$, és $T'B = T'V$, továbbá a kerületi szögek és az ugyanazon íven nyugvó középponti szögek közötti összefüggésből adódik, hogy az $\widehat{AB}$ ívhez tartozó középponti szög α, az $\widehat{AV}$ ívhez tartozó középponti szög 3α.

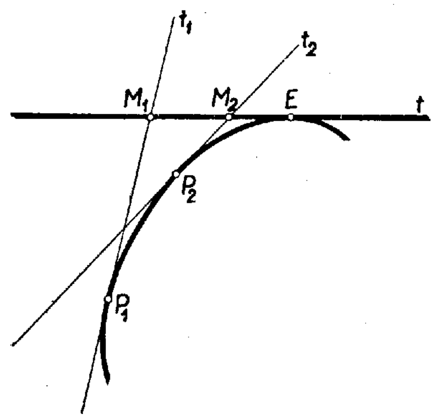
Vegyük most ezen főkör síkjában a tengellyel párhuzamos fénysugarak összességét, és nézzük meg, hogyan helyezkednek el a visszavert fénysugarak (2. ábra).



2. ábra

A visszavert fénysugarak szerkesztésénél a $TB = TV$, ill. $T'B = T'V$ tulajdonságokat használtuk fel. (Mindig a rövidebb szakaszt ajánlatos a szerkesztésnél felhasználni, mert ez ad kevésbé hegyes metszést, tehát pontosabb metszéspontot.) Így a V_1, V_2, ... pontok, és ezzel együtt a visszavert sugarak is könnyen szerkeszthetők. Már ezen néhány megszerkesztett visszavert sugár is egészen szépen mutatja, hogy a visszavert sugarak egy görbét burkolnak. A visszavert sugarak érintői egy görbének. A görbét sokkal jobban ismernők, ha minden megszerkesztett érintő érintési pontját is megszerkesztenők.

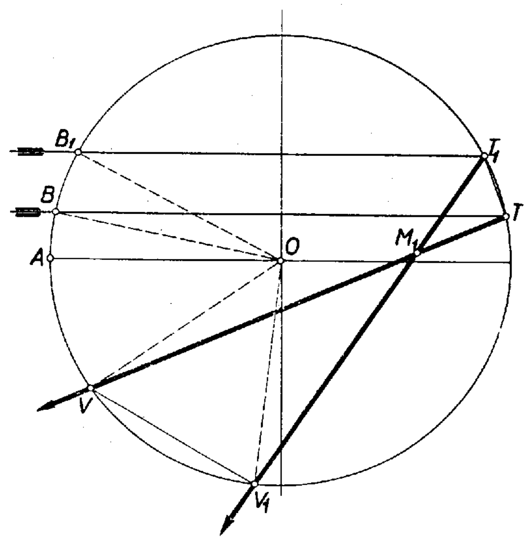
A 3. ábra szemléltet egy görbét, és annak E pontbeli t érintőjét.



3. ábra

Szerepel az ábrán a P_1 ponthoz tartozó t_1 érintő is. A t_1 és t metszéspontját M_1-gyel jelöltük. Vegyünk fel a görbén a P_1 és E pont között egy P_2 pontot, és a P_2-höz tartozó t_2 érintőt. A t_2 a t érintőt M_2 pontban metszi. Általában, ha P_1 elég közel van az E ponthoz, az M_2 pont az M_1 és az E közé esik. Ha így az E-hez egyre közelebb vesszük fel a P_3, P_4, ... pontokat, a hozzájuk tartozó t_3, t_4, ... érintőknek t-vel való M_3, M_4, ... metszéspontjai egyre közelebb jutnak az E-hez.

Ezt vegyük figyelembe előbbi feladatunknál. Szerkesszük meg a burkolt görbe két érintőjét, vagyis két visszavert sugarat (4. ábra).



4. ábra

$$M_1T_1T_\triangle \sim M_1VV_{1\triangle},$$

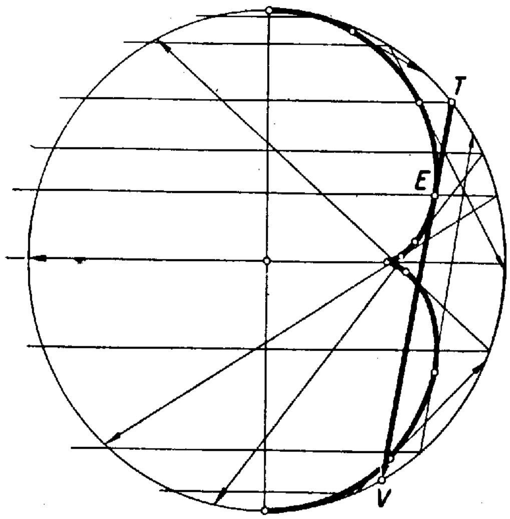
mert a kerületi szögek tétele értelmében szögeik egyenlők.

Mint fentebb láttuk, $\widehat{AV}_1 = 3\widehat{AB}_1$, $\widehat{AV} = 3\widehat{AB}$, és így a különbséget képezve $\widehat{VV}_1 = 3\widehat{BB}_1$. De a szerkesztés alapján $\widehat{BB}_1 = \widehat{TT}_1$, tehát

$$\widehat{VV}_1 = 3\widehat{TT}_1.$$

Közeledjünk B_1 ponttal (mindig a körön maradva) a B ponthoz, akkor T_1 a T-hez, V_1 pedig a V-hez közeledik, M_1 pedig közeledik a TV érintő E érintési pontjához. Minél jobban megközelíti a T_1 a T-t, V_1 a V-t, annál jobban megközelíti[1] a T_1T és V_1V húrok aránya a $\widehat{T_1T}$ és $\widehat{V_1V}$ íveket, amely – mint láttuk – $1:3$. Mivel hasonló háromszögekről van szó, azért az előbbi arány megegyezik $TM_1 : M_1V$ aránnyal. Így, míg B_1 közeledik B-hez, az M_1 pont egyre jobban megközelíti az érintő TV szakaszának T-től számított első negyedelő pontját. Azt kell tehát mondanunk, hogy a visszavert TV sugáron az E érintési pontra nézve $TE : EV = 1 : 3$. Ennek alapján könnyen megszerkeszthetők a visszavert sugarak által burkolt görbe egyes pontjai is (5. ábra).

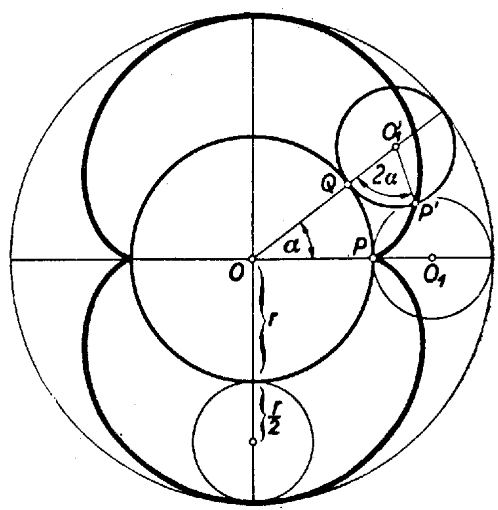
[1] Az itt következő meggondolás csak heurisztikus, de a függvénytan elemei segítségével szigorú matematikai bizonyítássá egészíthető ki.



5. ábra

Látszólag egész más kérdést fogunk most tárgyalni, de majd észrevesszük az előbbiekkel való összefüggést.

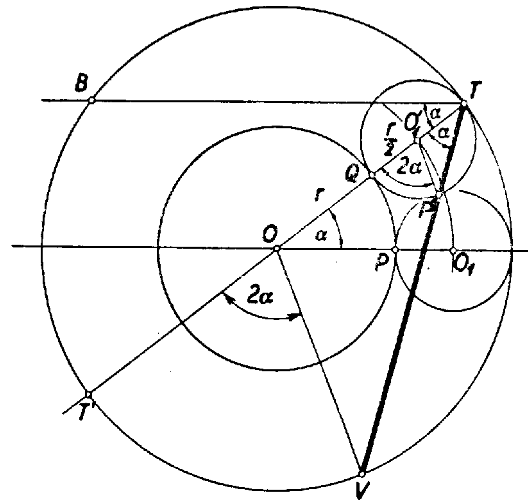
Tekintsünk egy r sugarú kört és egy, azt kívülről érintő, $r/2$ sugarú kört. Szemeljük ki a két kör P érintkezési pontját. Gördítsük az $r/2$ sugarú kört az r sugarú körön, s nézzük meg, hogy milyen görbét ír le közben a P pont (6. ábra).



6. ábra

Az $r/2$ sugarú kör O_1 középpontja kört ír le mozgás közben. Egy pillanatnyi helyzetben O_1' helyre került. Akkor α szöggel fordult el az O körül. Az $r/2$ sugarú kör azonban nem csúszik, hanem gördül. Gördülés közben a P pont a P' helyzetbe került, ahol $\widehat{QP} = \widehat{QP'}$. Félakkora sugarú körben viszont ugyanakkora ívhez kétszer akkora középponti szög tartozik. Amíg tehát az $r/2$ sugarú kör középpontja α szöggel fordul el az O körül, az $r/2$ sugarú kör 2α szöggel fordul el a középpontja körül. Tehát a P' pont az az O_1' középpontú $r/2$ sugarú körön az $OO_1'P'\sphericalangle = 2\alpha$ felhasználásával szerkeszthető.

A P pont egy pillanatnyi helyzetét (P') még egyszer lerajzoltuk a 7. ábrán.



7. ábra

A BT egyenest az OP egyenessel párhuzamosan húztuk. Így a $BTO\sphericalangle = \alpha$, mint váltószög. A $P'TO\sphericalangle$ szintén α, a kerületi szögek tétele alapján. Ez viszont azt jelenti, hogy a BT fénysugár a $2r$ sugarú, O középpontú gömbtükörről TP' egyenesben verődne vissza.

Az $O_1'P'$ és OV egyenesek párhuzamosak, mert mindkettő a TT' egyenes ugyanazon irányával 2α szöget zár be a kerületi szögek tétele szerint. Ebből adódik, hogy

$$OVT_\triangle \sim O_1'P'T_\triangle,$$

és így

$$TP' : TV = TO_1' : TO = \frac{r}{2} : 2r = 1 : 4.$$

Az az eredmény adódott tehát, ha az előbb vizsgált görbével összevetjük, hogy a P pont által leírt görbe azonos a BT-vel párhuzamosan beeső fénysugaraknak a $2r$ sugarú körről visszavert fénysugarai által burkolt görbével.

Ime, ugyanazt a görbét két különböző módon származtattuk.

A gömbtükör tengelyével párhuzamos *összes* sugarakat tekintve, a visszavert sugarak minden egyes főkör síkjában burkolnak ilyen görbét, vagyis a visszaverődő sugarak összessége egy forgásfelületet burkol, amely a tárgyalt görbének a tükör tengelye körül forgásából keletkezik (és egy alma felső felületéhez hasonlít).

Ha félkörhenger belső felülete a tükröző felület, és a fénysugarak iránya a henger tengelyére merőleges, akkor a visszavert sugarak egy ugyancsak hengerszerű felületet burkolnak, amelynek keresztmetszete az itt tárgyalt görbe. Hasonló görbe alakul ki fényesen egy üres csésze fenekén, ha ferdén belesüt a nap. Itt a csésze oldala a tükröző hengerfelület, mivel azonban a sugarak nem a tengelyre merőlegesen érkeznek, azért a csészében látható görbe is csak hasonlít az itt tárgyalthoz. (Gyakran a fenti görbe csúcsa helyén kis hurok alakul ki.)

A második származtatási móddal kapcsolatban a következőket kívánjuk még hozzáfűzni. Ha egy rögzített f síkgörbén – annak síkjában – egy g síkgörbe gördül, akkor a g görbe síkjának minden pontja egy görbét ír le, melynek neve *ruletta.* Ha f egyenes vagy kör, és g kör, akkor *ciklois* keletkezik, mégpedig epiciklois, ha a g kör az f körön kívül gördül, és hipociklois, ha g az f körön belül gördül. Azonkívül hurkolt, csúcspontos és nyújtott cikloisról beszélünk aszerint, amint a P leíró pont a g körön kívül, rajta, ill. belül van. Eszerint az itt tárgyalt görbe egy kétágú csúcspontos epiciklois.