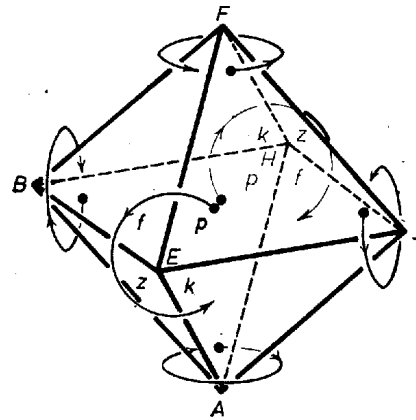


I. megoldás. A szabályos oktaéder leírását és szimmetriáit ismertnek vesszük, nem bizonyítjuk. A befestendő modelleket mozgathatóknak tekintjük.

A 8 lap 4 párhuzamos párt alkot, így a színek mindegyikével 1 párt, azaz 2 lapot festünk be. Egy szín-elrendezés meghatározásához elegendő megadni egyetlen csúcsban az ott összefutó 4 lap színeinek kölcsönös helyzetét, hiszen ezek közt nincs párhuzamos, és így mindegyik szín egyik előfordulását elhelyeztük. A választott csúcs szín-rendjét úgy írjuk le, hogy a csúcsba befutó tengelyt szemünk felé irányítjuk és egyik – mondjuk a piros – laptól az órajárással szemben haladva megadjuk az egymás után látott három színt (az utolsó után ismét a piros következik).

A piros utáni első szín 3-féleképpen választható, a következő 2-féleképpen, és ezzel az utolsó lap színe is kiadódott; ezek szerint egy csúcs környezetének (a befutó 4 lapnak) színezése $3 \cdot 2 = 6$ -féleképpen lehetséges. A teljes oktaéderre ezekből adódó színezések azonban nem különböznek egymástól. Megmutatjuk ugyanis, hogy az oktaédernek kívánt színezésében mind a 6 csúcs szín-rendje különböző; ebből következik, hogy a mondott 6-féle megindulás ugyanarra az eredményre vezet.

Valóban, két szemben levő csúcs színezése különböző, mert pl. az E elülső csúcsbeli jobb felső lapot pirosra, a továbbiakat rendre fehérre, zöldre, kékre festve (1. ábra) a H hátulso csúcsban összefutó lapok *belső oldalát* ugyancsak p, f, z, k sorrendben látjuk – éspedig p -t balról lent –, ezért H -ra hátulról – azaz *kivülről* – ránézve p, k, z, f a sorrend.



1. ábra

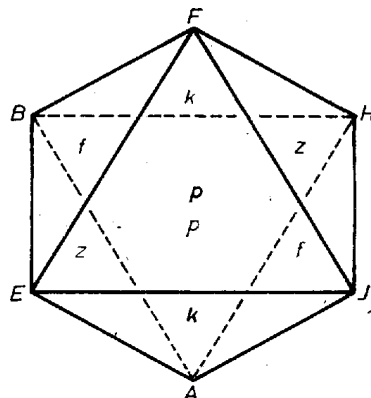
Két szomszédos csúcs szín-rendje pedig azért különböző, mert az összekötő élükben összefutó két lap színei a két leírásban közvetlenül egymás mellett állnak, de ellentétes sorrendben. A példát folytatva a felső, az alsó, a bal és a jobb csúcs leírása rendre

$$F : p, z, k, f; \quad A : p, f, k, z; \quad B : p, z, f, k; \quad J : p, k, f, z.$$

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Horváth László (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Gimn., I. o, t.)

II. megoldás. Egyszerűbben jutunk a fenti eredményhez, ha az oktaéder FEJ lapját fordítjuk látósugarunkra merőleges helyzetbe, ezt festjük pirosra, és a vele élben szomszédos három lap szín-sorrendjét írjuk elő: f, k, z (2. ábra).



2. ábra

A hátul levő párhuzamos lapok *belső* oldalait ugyancsak f, k, z sorrendben látjuk a hátsó p lap körül (180° -kal elfordulva), eszerint hátulról nézve az oktaéderre, a p lappal szomszédos lapok sorrendje f, z, k , az elülsőtől különböző.

Márpedig p körül a három további szint ciklikusan csak 2 különböző sorrendben helyezhetjük el, a két kiindulás a (teljes) oktaédernek ugyanarra a szín-rendjére vezet. (A két szín-rendet egy-egy modellen megvalósítva, ezek úgy forgathatók, hogy a megfelelő csúcsaikat összekötő lapok ugyanolyan színűek.)

Schűgerl Márta (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)