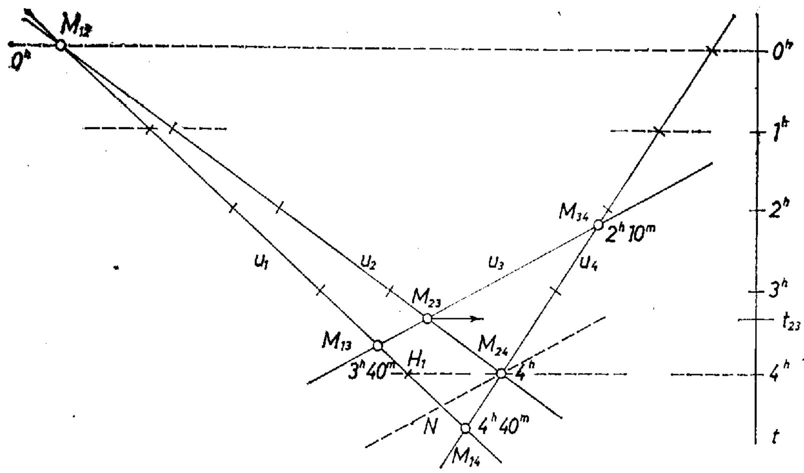
I. megoldás. Jelöljük a járműveket J_i-vel, útvonalaikat u_i-vel, ahol $i = 1, 2, 3, 4$, az u_k, u_m útvonalak metszéspontját $(m > k) M_{km}$-mel (1. ábra).



1. ábra

A találkozási időadatok és a sebességek állandó iránya alapján $M_{14}M_{13} < M_{14}M_{12}$ és $M_{14}M_{24} < M_{14}M_{34}$, ezért az u_2, u_3 útvonalpár metszi egymást és M_{23} egyrészt M_{12} és M_{24}, másrészt M_{34} és M_{13} között van. Megmutatjuk, hogy J_2-nek és J_3-nak M_{23}-on való áthaladási időpontja megegyezik.

Jelöljük J_i-nek 1 perc alatt megtett útját v_i-vel, így a sebességek számértékének állandó volta alapján

$$M_{12}M_{13} = 220v_1, \quad M_{13}M_{14} = 60v_1; \quad M_{24}M_{14} = 40v_4, \quad M_{34}M_{14} = 150v_4;$$
$$M_{12}M_{24} = 240v_2; \quad M_{34}M_{13} = 90v_3.$$

Messe az u_3-mal M_{24}-en át húzott párhuzamos u_1-et (M_{13} és M_{14} között, hiszen M_{14} ugyanazon oldalán van u_3-nak, mint M_{24}) N-ben, ekkor a szög szárait metsző párhuzamosok tételeit előbb az $M_{12}M_{14}M_{34}$ szögre, majd az $M_{14}M_{12}M_{24}$ szögre alkalmazva egyrészt

$$NM_{14} : M_{13}M_{14} = M_{24}M_{14} : M_{34}M_{14} \quad \text{és} \quad NM_{24} : M_{13}M_{34} = M_{14}M_{24} : M_{14}M_{34},$$

amiből a fenti értékekkel

$$NM_{14} = M_{13}M_{14} \cdot \frac{M_{24}M_{14}}{M_{34}M_{14}} = 16v_1, \quad \text{ill.} \quad NM_{24} = M_{13}M_{34} \cdot \frac{M_{14}M_{24}}{M_{14}M_{34}} = 24v_3,$$

és így $\quad M_{13}N = 44v_1, \quad M_{12}N = 264v_1, \quad$ másrészt

$$M_{23}M_{12} : M_{24}M_{12} = M_{23}M_{13} : M_{24}N = M_{13}M_{12} : NM_{12} = 220v_1 : 264v_1 = 5 : 6,$$

amiből

$$M_{23}M_{12} = \frac{5}{6}M_{24}M_{12} = 200v_2, \quad \text{és} \quad M_{23}M_{13} = \frac{5}{6}M_{24}N = 20v_3.$$

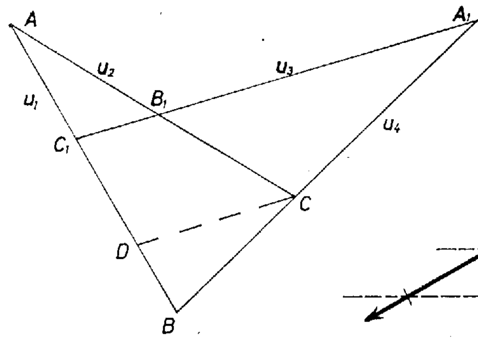
Ezek szerint az $M_{12}M_{23}$ utat J_2 200 perc alatt teszi meg, M_{23}-on éjfél után 200 perccel, azaz 3^h20^m-kor halad át, J_3 pedig az M_{13}-beli 3^h40^m-es találkozása előtt 20 perccel, vagyis ugyancsak 3^h20^m-kor. – Ezzel a megoldást befejeztük.

Krasznai András (Gyöngyös, Vak Bottyán Gimn., IV. o. t.)

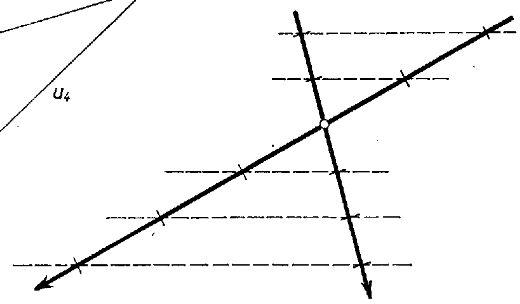
Megjegyzés. Számításunkat részben megismételjük a lényegében azonos, egyszerűbb betűzésű $1'$ ábrához kapcsolódva, ahol az ABC háromszög AB, BC, CA oldalegyenesét az u_3 egyenes rendre a C_1, A_1, B_1 pontban metszi és $DC||C_1A_1$. Ebből két módon kifejezve, ezeket egyenlővé téve, majd az első kifejezést a másodikkal osztva

$$C_1D = A_1C \cdot \frac{C_1B}{A_1B} = B_1C \cdot \frac{AC_1}{AB_1}, \qquad \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} = 1,$$

az ún. *Menelaosz-féle tétel*t kaptuk. (A szakaszokat a háromszög körüljárása mentén irányítva a tétel tulajdonképpen azt mondja, hogy a 3 hányados szorzatának értéke –1; ugyanis egy a háromszög mindhárom oldalegyenesétől különböző egyenes vagy két pontban metszi a kerületet és ekkor egy oldal meghosszabbítását metszi, vagy mindhárom oldal meghosszabbítását metszi, és minden ilyen esetben a megfelelő hányados negatív, pl. az ábrán CA_1 és A_1B ellentétes irányúak, míg az első két hányados pozitív, mert az AC és AB oldal szeletei egyirányúak.)



1'. ábra



2. ábra

Esetünkben $BC_1/C_1A = 60/220 = 3/11$, $CA_1/A_1B = 110/150$, ezeket behelyettesítve $AB_1/B_1C = 5$, másrészt $AB_1 + B_1C = 240v_2$, így $AB_1 = 200v_2$.

Alkalmazzuk másrészt a tételt az A_1BC_1 háromszögre, szelőnek véve u_2-t:

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} \cdot \frac{C_1A}{AB} \cdot \frac{BC}{CA_1} = 1,$$

amiből $A_1B_1/B_1C_1 = 7/2$, továbbá $A_1B_1 + B_1C_1 = 90v_2$, így $A_1B_1 = 70v_2$.

Ezeket időre átszámítva mindkét esetben 3^h20^m adódik áthaladási időpontnak.

II. megoldás *a feladat első részére.* Az időpont kiszámítása nélkül bizonyítjuk, hogy J_2 és J_3 találkoztak.

Nyilvánvaló, hogy ha két egyenesvonalú, egyenletes mozgást végző testről tudjuk, hogy – bár útvonalaik különbözők – találkoztak, vagyis utaik kereszteződésén egyszerre haladtak át, akkor bármely időpontban megrajzolva a testeket összekötő egyenest, ennek iránya mindig ugyanaz, és mindkét út írányától különböző (2. ábra).

Ha a feltevések 3 testre páronként érvényesek, akkor a 3 test bármely időpontban egy egyenesen helyezkedik el, mert – a kimondott eredményt a J_1, J_2, J_4 hármasra alkalmazva – J_1J_2 iránya is, J_1J_4 iránya is állandó, és a J_2, J_4 találkozás t_{24} időpontjában közös pontjuk van: M_{24}. Ugyanez áll a J_1, J_3, J_4 hármasra, s mivel J_1 és J_4 mindkét hármasnak tagja, mind a négy járműre. Ezért u_2 és u_3 metszéspontján J_2 és J_3 egyszerre haladt át.

Lukács Péter (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

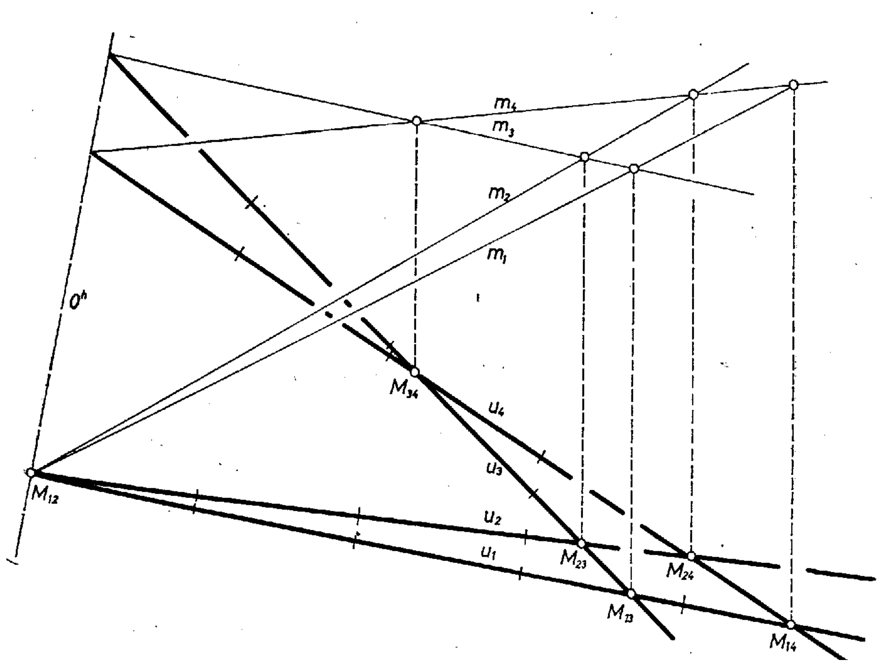
Megjegyzés. A bizonyítást kiegészíthetjük a találkozási t_{23} időpont grafikus meghatározásává (1. ábra).

Ehhez alapot ad egy az útvonalakról szerkesztett mérethű térképvázlat, miután megválasztottuk az u_1, u_4 közti φ szöget, továbbá v_1 és v_4 arányát. Könnyű ezen kijelölni J_1-nek 4^h-kor elfoglalt H_1helyzetét, ami $M_{13}M_{14}$-nek első harmadoló pontja (vagy J_4-nek 2^h-kor, majd 0^h-kor elfoglalt helyzetét), s ekkor a 4 pontot állandóan felfűző f egyenes 4^h-kor a H_1M_{24} helyzetben van.

Mármost f-re bárhol merőlegest – időtengelyt – állítva, ezen pl. M_{12} és H_1 vetülete meghatározza az időskálát, végül M_{23}, vetületében leolvashatjuk t_{23} értékét.

Az olvasóra hagyjuk a mondottak bizonyítását (aminek természetesen azt is tartalmaznia kell, hogy az eredmény független φ és a $v_1 : v_4$ arány megválasztásától).

III. megoldás *a feladat első részére.* Gondoljuk, hogy mind a négy jármű éjfélkor indult el és ugyanakkor mindegyikről felszállt egy madár, ezek mindegyike a maga járműve fölött repült és a 4 madár közös sebességgel emelkedett fölfelé. Így a madarak m_i pályái is egyenesek és az adatok szerinti 5 találkozásnak megfelelően a megfelelő madárpályák páronként metszik egymást, hiszen bármelyik két útvonal metszéspontja fölött áthaladva a hozzájuk tartozó két madár magassága egyenlő volt (3. ábra).



3. ábra

Mármost m_1, m_2 és m_4 egy síkban van, mert páronként metszik egymást, különböző pontokban. Ugyanígy m_1, m_3 és m_4 is egy síkban és ez a sík azonos az előbbivel, mert két különböző közös egyenesük van. Eszerint m_2 és m_3 egy síkban van, metszik egymást. A metszéspontban J_2 és J_3 madara találkozott, mert a metszéspont magassági értékét mindkettő egyszerre haladta át, ezért (alattuk) járműveik is éppen találkoztak.

Szamosújvári Sándor (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., III. o. t.)
ötlete, módosítva

IV. megoldás. Vegyünk fel a síkban egy tetszőleges pontot origónak, és jellemezzük a sík pontjait az origóból hozzájuk vezető vektorral, az illető pont *helyvektor*ával. Ha egy egyenletesen mozgó jármű a t_1 időpontban az x_1 helyen, t_2 időben pedig x_2-ben van, akkor a t időponthoz tartozó $x(t)$ helyvektor:

$$x(t)=\frac{(t_2-t)x_1+(t-t_1)x_2}{t_2-t_1}, \tag{1}$$

hiszen a jármű sebessége $\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$, így az x_1 pontból indulva $t-t_1$ idő múlva az

$$x(t)=x_1+(t-t_1)\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$$

pontba jut, amiből egyszerű átalakítással kapjuk (1)-et.

Jelöljük az M_{12}, M_{14}, M_{34} pontok helyvektorát rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$-vel, az M_{13}, M_{24} pontokét $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{a}_1$-gyel. Ekkor (1) alapján

$$\mathbf{c}_1=\frac{60\mathbf{a}+220\mathbf{b}}{280},\qquad \mathbf{a}_1=\frac{110\mathbf{b}+40\mathbf{c}}{150}.$$

Hasonló eredményt kapunk, ha az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ helyvektorú pontokban rendre 60, 220, 80 egységnyi tömeget helyezünk el: ekkor $\mathbf{c}_1$ épp az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ tömegpár súlypontja, $\mathbf{a}_1$ pedig a $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ tömegpáré.

A három tömeg (együttes) súlypontja:

$$\mathbf{s}=\frac{60\mathbf{a}+220\mathbf{b}+80\mathbf{c}}{360}.$$

Ez a pont rajta van a II., III. jármű útvonalán, vagyis az $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$, illetve $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}_1$ szakaszon, hiszen

$$\mathbf{s}=\frac{60\mathbf{a}+300\mathbf{a}_1}{360}=\frac{280\mathbf{c}_1+80\mathbf{c}}{360}.$$

(1) alapján meghatározhatjuk azt is, hogy a pálya egy adott x pontján milyen t időpontban halad át a jármű:

$$(t_2-t):(t-t_1)=(x_2-x):(x-x_1).$$

Eszerint a II. jármű az $\mathbf{s}$ ponton abban a t_{II} időpontban halad át, melyre (az időt 0^h-tól percben mérve)

$$(240-t_{\mathrm{II}}):t_{\mathrm{II}}=60:300=1:5,$$

azaz $t_{\mathrm{II}} = 200$. Hasonlóan a III. jármű **s**-en való áthaladásának t_{III} időpontjára.

$$(240 - t_{\mathrm{III}}) : (t_{\mathrm{III}} - 130) = 80 : 280 = 2 : 7,$$

azaz $t_{\mathrm{III}} = 200$, vagyis a két jármű valóban egy időben halad át **s**-en.

(Tusnády Gábor)

Megjegyzés. A fenti gondolatmenettel beláthatjuk, hogy ha a járművek az **a**, **b**, **c** pontokban t_1, t_2, t_3 időpontban haladnak át, és az **s** pont az **a**, **b**, **c**-ben ható rendre α, β, γ nagyságú súlyokhoz tartozó súlypont, akkor a megfelelő járművek **s**-en a

$$t = \frac{\alpha t_1 + \beta t_2 + \gamma t_3}{\alpha + \beta + \gamma}$$

időpontban haladnak át. Feladatunk adataival

$$t = \frac{60 \cdot 0 + 220 \cdot 280 + 80 \cdot 130}{360} = 200.$$