Legyenek az első háromszög befogói a és b, átfogója c, ekkor a második háromszögéi $a+100$, $b+100$ és $c+140$, és Pitagorasz tétele szerint

$$a^2+b^2=c^2 \qquad \text{és} \qquad (a+100)^2+(b+100)^2=(c+140)^2.$$

A másodikból az elsőt levonva átrendezés és egyszerűsítés után

$$5(a+b+2)=7c. \tag{1}$$

Ez csak úgy állhat fenn, ha c osztható 5-tel: $c=5c'$, ahol c' is egész szám. Ekkor

$$a+b=7c'-2.$$

Ezt felhasználva első egyenletünk alapján ab-t is kifejezhetjük c'-vel:

$$25c'^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(7c'-2)^2-2ab.$$

Innen átrendezés és egyszerűsítés után

$$ab=12c'^2-14c'+2.$$

Ezek alapján a és b az

$$x^2-(7c'-2)x+(12c'^2-14c'+2)=0 \tag{2}$$

x-re vonatkozó másodfokú egyenlet két gyöke. Ezek csak úgy lehetnek egészek, ha a diszkrimináns egy t egész szám négyzete:

$$(7c'-2)^2-4(12c'^2-14c'+2)=c'^2+28c'-4=(c'+14)^2-200=t^2.$$

Ebből

$$(c'+14)^2-t^2=(c'+t+14)(c'-t+14)=200.$$

A szorzat tényezői egyező párosságúak, mert $2t$-vel, tehát páros számmal különböznek. Így mindkettő páros, hiszen a szorzatuk páros. Feltehetjük, hogy t pozitív, akkor az első tényező pozitív, tehát a második is, és az első a nagyobb. A 200 szóba jövő felbontásai: $200=100\cdot 2=50\cdot 4=20\cdot 10$. A két tényezőt $2m$ és $2n$-nel jelölve

$$c'+t+14=2m, \qquad c'-t+14=2n,$$

innen

$$c'=m+n-14, \qquad t=m-n, \qquad c=5c'=5m+5n-70,$$

és a befogók, mint a (2) egyenlet két gyöke

$$a,\ b=\frac{7c'-2\pm t}{2}=4m+3n-50, \qquad \text{ill.} \qquad 3m+4n-50.$$

Behelyettesítve $m,\ n$-re a kapott 50, 1; 25, 2; 10, 5 értékpárokat, a következő háromszög-oldalakat kapjuk:

m	50	25	10
n	1	2	5
a	153	56	5
b	104	33	0
c	185	63	5

Az utolsó számhármas nem szolgáltat háromszög oldalakat, az első kettőről meggyőződhetünk, hogy kielégítik a pitagoraszi egyenletet és a feladat értelmében megnövelt oldalhosszak is. (Ez a harmadik hármasra is teljesül.)

Megjegyzés. Hasonló meggondolással jutunk célhoz akkor is, ha felhasználjuk, hogy ha egy derékszögű háromszög oldalhosszai relatív prím egészek, akkor előállíthatók $a=u^2-v^2$, $b=2uv$, $c=u^2+v^2$ alakban, ahol u és v egymáshoz relatív prím természetes számok, amelyek egyike páros, másikuk páratlan,[1] és ezeket (1)-be helyettesítjük.

[1] Lásd pl. *H. Rademacher – O. Toeplitz:* Számokról és alakzatokról, Középisk. Szakköri Füzetek, 2. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1954, 87–88. o.