I. megoldás. A szóba jövő x értékekről egy első tájékoztatást nyerhetünk abból, hogy $x-1<[x]\le x$. Az egyenlet bal oldalán álló kifejezést csökkentjük, vagy legalábbis nem növeljük, ha $[x]$ helyére x-et írunk benne, és növeljük, ha helyette $x-1$-et írunk. Azokra az x-ekre tehát, amelyekre az egyenlet teljesül,

$$x^3-40x-78\le 0 \quad \text{és} \quad x^3-40x-38>0,$$

azaz

$$38<x(x^2-40)<78.$$

Itt vagy mind a két tényező pozitív, vagy mind a kettő negatív. Az első esetben $x>\sqrt{40}$, és a középső kifejezés növekedő x-szel nő. Így, mivel $x=8$-nál az értéke már 78-nál nagyobb, tehát

$$\sqrt{40}<x<8.$$

A második eset akkor következik be, ha

$$-\sqrt{40}<x<0.$$

Az ezeknek a feltételeknek megfelelő x értékek egész része a következő lehet:

$$-7,\ -6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 6,\ 7.$$

Ezekkel az értékekkel mint $[x]$ értékekkel kiszámítva az egyenlet szerint adódó

$$x=\sqrt[3]{40[x]+78} \tag{2}$$

értékkel akkor kapjuk az egyenlet egy gyökét, ha egész része a kiindulásul használt érték lesz. Ezek az értékek táblázat alapján két tizedesjegy pontossággal rendre

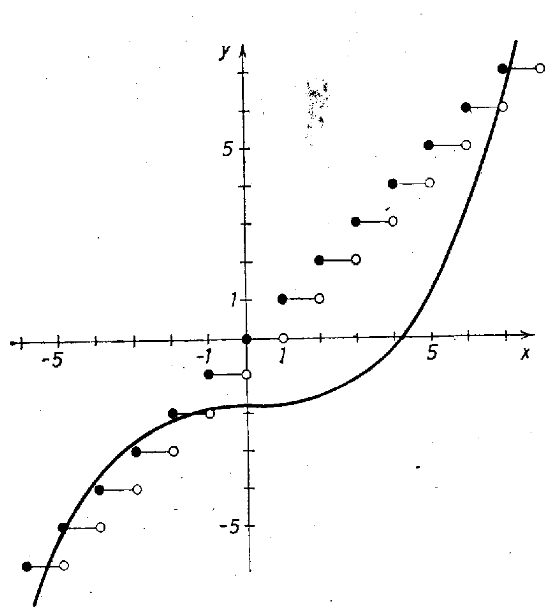
$$-5,87;\quad \underline{-5,45};\quad \underline{-4,96};\quad -4,34;\quad -3,48;\quad \underline{-1,26};\quad 3,36;\quad \underline{6,83};\quad \underline{7,10}.$$

Közülük az aláhúzott öt érték teljesíti a mondott feltételt, tehát ezek adják az egyenlet gyökeit.

II. megoldás. Grafikusan oldjuk meg az egyenletet, az átrendezett

$$\frac{x^3-78}{40}=[x] \tag{3}$$

alakjának két oldalán álló függvényeket külön-külön ábrázoljuk, és leolvassuk a két grafikon minden egyes közös pontjának abszcisszáját, ez adja egy-egy gyök közelítő értékét.



Az ábráról a $(-6,8)$ intervallumban kb. 0,05 (1/20 egység) pontossággal a következő gyökök olvashatók le:

$$x_1=-5{,}45,\qquad x_2=-4{,}95,$$
$$x_3=-1{,}25,\qquad x_4=6{,}85,\qquad x_5=7{,}10.$$

x_5-nél nagyobb gyök nincs. Ugyanis az $y=[x]$ függvény x-nek 1 egységnyi növekedése esetén 1-gyel nő. Viszont a (3) bal oldalán álló függvény növekedése, ha x helyére $x+1$-et írunk:

$$\frac{(x+1)^3-78}{40}-\frac{x^3-78}{40}=\frac{3x^2+3x+1}{40}=\frac{3}{40}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{160},$$

ennek értéke $x>7$ esetén nagyobb 3-nál, a bal oldal képe mindig fölötte van $y=[x]$ képének.

Hasonlóan nincs x_1-nél kisebb gyök, mert a talált másodfokú függvény értéke $x<-6$ esetén is nagyobb 2-nél, tehát a bal oldal képe mindig alatta van $y=[x]$ képének.

Megjegyzés. A megoldást továbbfejlesztve a gyökök tetszés szerinti pontossággal meghatározhatók. A metszéspontokban leolvashatjuk $[x]$ értékét, ez rendre -6, -5, -2, 6, ill. 7, ennek ismeretében pedig (1) tiszta harmadfokú egyenlet. (2) alapján, köbgyöktáblázat felhasználásával, 4 tizedes pontossággal:

$$x_1=\sqrt[3]{-162}=-5{,}4514, \qquad x_4=\sqrt[3]{318}=6{,}8256,$$

$$x_2=\sqrt[3]{-122}=-4{,}9597, \qquad x_5=\sqrt[3]{358}=7{,}1006.$$

$$x_3=\sqrt[3]{-2}=-1{,}2599,$$

Zambó Péter (Miskolc, Földes F. Gimn., IV. o. t.)