I. megoldás *a)* Azt kell belátnunk, hogy ha c és d természetes számok, akkor

$$c(c+1)=d(d+2) \tag{1}$$

nem teljesülhet. Valóban, ha $d\geq c(>0)$, akkor $d+2>c+1$, tehát a jobb oldalon nagyobb szám áll, mint balról. Ha pedig $(0<)d<c$, akkor $d+2\leq c+1$, és a jobb oldalon kisebb szám áll, tehát semmiképpen nem áll fenn egyenlőség.

b) Annak belátását, hogy az

$$m^4+(m+1)^4=n^2+(n+1)^2 \tag{2}$$

egyenlőség nem teljesülhet, ha m, n természetes számok, visszavezetjük az *a)* állításra. Kifejtéssel, majd 1-et mindkét oldalon elhagyva, 2-vel osztva, végül mindkét oldalt szorzattá alakítva (2) így alakul:

$$m^4+2m^3+3m^2+2m=n^2+n,$$
$$(m^2+m)(m^2+m+2)=n(n+1),$$

és itt m^2+m természetes szám. Ez pedig (1) szerint lehetetlen.

Gajdács Ibolya (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás *a)* Elég azt belátnunk, hogy ha c természetes szám, az

$$x(x+2)=c(c+1), \qquad \text{azaz} \qquad (x+1)^2=c^2+c+1$$

egyenlet pozitív gyöke:

$$x=-1+\sqrt{c^2+c+1},$$

nem egész szám. Valóban, a gyök alatti D egész számra fennáll a következő kettős egyenlőtlenség:

$$c^2<D<c^2+2c+1=(c+1)^2, \quad \text{vagyis}$$
$$c<\sqrt{D}<c+1,$$

és itt c, $c+1$ szomszédos természetes számok, ezért $\sqrt{D}$ nem természetes szám, tehát az 1-gyel kisebb x sem egész.

b) Ha m természetes szám, az

$$x^2+(x+1)^2=m^4+(m+1)^4, \quad \text{másképpen}$$
$$x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=m^4+2m^3+3m^2+2m$$

egyenlet pozitív gyöke:

$$x=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{4m^4+8m^3+12m^2+8m+1}\right),$$

és ez nem egész szám, mert nem racionális szám. Valóban, a diszkrimináns egész szám, de nem teljes négyzet, hiszen közéje esik a $2m^2+2m+1$ és $2m^2+2m+2$ szomszédos természetes számok négyzetének, ami

$$4m^4+8m^3+8m^2+4m+1, \quad \text{ill.}$$
$$4m^4+8m^3+12m^2+8m+4.$$

Ezzel az állításokat bebizonyítottuk.

Fal Imre (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., IV. o. t.)
Gegesy Ferenc (Budapest, Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.)