Megoldás. I. Felismerjük, hogy a $b_1, b_2, b_3, \ldots$ számsorozat egy-egy összefüggő részsorozatában az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozat valamely a_k tagja az első tag – nevezzük ezt a részsorozat vezértagjának –, és mellette kivonandóként, majd hozzáadva szerepelnek egyenként az összes nála kisebb indexű tagok, az indexeknek előbb csökkenő, majd növekedő rendjében, $a_k - a_1$ és $a_k + a_1$ között pedig maga a_k szerepel tagként. Eszerint az a_k vezértagú részsorozat:

(1) $$a_k - a_{k-1}, a_k - a_{k-2}, \ldots, a_k - a_2, a_k - a_1, a_k, a_k + a_1, a_k + a_2, \ldots, a_k + a_{k-2}, a_k + a_{k-1},$$

és tagjainak száma $2(k-1)+1 = 2k-1$.

Másrészt a vezértag szerepét egymás után $a_1, a_2, a_3, \ldots$ játssza, ennélfogva az a_k vezértagú részsorozat végéig a részsorozatok száma k, és tagjaik számának összege

$$1 + 3 + \ldots + 2k - 1 = \frac{1}{2}k[1 + (2k-1)] = k^2,$$

ez az $a_k + a_{k-1}$ tag indexe. Eszerint valahányszor az index átlépi a k^2 négyzetszámot, a vezértag szerepét átveszi a_k-tól az $a_k + 1$ tag a sorozatból.

Ha mármost az adott index négyzetszám: $m = M^2$, akkor $b_m = a_M + a_{M-1}$. Ha m nem négyzetszám és négyzetgyökének egész része M, vagyis

$$M^2 < m < (M+1)^2, \qquad \text{és} \qquad m = M + \mu,$$

ahol tehát

$$0 < \mu < 2M + 1,$$

akkor

$$b_m = \begin{cases} a_{M+1} - a_{M+1-\mu} & \text{ha} \quad 0 < \mu \leqq M; \\ a_{M+1}, & \text{ha} \quad \mu = M + 1; \\ a_{M+1} + a_{\mu-M-1}, & \text{ha} \quad M + 1 < \mu < 2M + 1. \end{cases}$$

Az adott numerikus példákban

$$1968 = 44^2 + 32, \qquad 3968 = 62^2 + 124,$$

eszerint

$$b_{1968} = a_{45} - a_{13}, \qquad b_{3968} = a_{63} + a_{61}.$$

II. Könnyű belátni, hogy az a_k vezértagú (1) részsorozat összege $(2k-1)a_k$, így $m = M^2$ esetén az első m tag összege

$$s_m = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{m-1} + b_m = a_1 + 3a_2 + 5a_3 + \ldots + (2M-1)a_M = S_M,$$

és erre egyszerűbb kifejezést nem adhatunk, amíg csak az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozat tagjairól közelebbi adatunk nincs.

Hasonlóan $m = M^2 + \mu$ esetén a fenti összeghez hozzáadandó az a_{M+1} vezértagú csonka részsorozat első μ tagjának összege, így

$$s_m = \begin{cases} S_M + \mu a_{M+1} - (a_M + a_{M-1} + \ldots + a_{M+1-\mu}), & \text{ha} \quad 0 < \mu \leqq M; \\ S_M + \mu a_{M+1} - (a_M + a_{M-1} + \ldots + a_1), & \text{ha} \quad \mu = M + 1; \\ S_M + \mu a_{M+1} - (a_M + a_{M-1} + \ldots + a_{\mu-M}), & \text{ha} \quad M + 1 < \mu < 2M + 1. \end{cases}$$

A fenti indexekre alkalmazva az eredményt:

$$S_{1968} = a_1 + 3a_2 + 5a_3 + \ldots + 87a_{44} + 32a_{45} - (a_{44} + a_{43} + \ldots + a_{13});$$
$$S_{3968} = a_1 + 3a_2 + \ldots + 123a_{62} + 124a_{63} - a_{62}.$$

Boda Sándor (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., IV. o. t.)
Ésik Zoltán (Szeged, Ságvári E. Gyak Gimn., IV. o. t.)