Vonjuk ki az (1_i) egyenlet mindkét oldalából x_i-t (ahol $i=1,2,\ldots,n$):

$$(1')\begin{cases}(1'_1) & ax_1^2 & +(b-1)x_1 & +c=x_2-x_1,\\ (1'_2) & ax_2^2 & +(b-1)x_2 & +c=x_3-x_2,\\ \ldots & & \ldots\ldots\ldots & \\ (1'_{n-1}) & ax_{n-1}^2 & +(b-1)x_{n-1} & +c=x_n-x_{n-1},\\ (1'_n) & ax_n^2 & +(b-1)x_n & +c=x_1-x_n.\end{cases}$$

Eszerint az egyenletrendszer megoldásában $i=1,2,\ldots,n-1$ esetén x_{i+1} annyival nagyobb x_i-nél, mint az

$$f(x)=ax^2+(b-1)x+c$$

másodfokú függvények az x_i helyen felvett $f(x_i)$ értéke, és x_1 az $f(x_n)$ értékkel nagyobb, mint x_n.

α) Mármost az I. feltevés esetén $f(x)$ előjele állandó és megegyezik a előjelével, mert így írható:

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b-1}{2a}\right)^2-\frac{(b-1)^2-4ac}{4a^2}\right], \tag{2}$$

és a szögletes zárójelbeli kifejezés pozitív. Eszerint – feltéve, hogy van valós megoldás és $a>0$ – az $(1')$ egyenletek jobb oldalán álló különbségek mindegyike pozitív, emiatt

$$x_1<x_2<x_3<\ldots<x_{n-1}<x_n<x_1. \tag{3}$$

Ez pedig ellentmondás, hiszen a szigorúan növekedő sorozat elején és végén ugyanaz a szám áll: x_1, ilyen megoldás tehát nincs.

Ugyanez adódik $a<0$ esetén abból, hogy $(1')$ mindegyik egyenletének mindkét oldala negatív, és ezért

$$x_1>x_2>x_3>\ldots>x_{n-1}>x_n>x_1. \tag{4}$$

β) A II. feltevés esetén $f(x)$ a (2) alak szerint egyetlen helyen, az

$$x=\frac{1-b}{2a} \tag{5}$$

helyen a 0 értéket veszi fel, minden más helyen olyan előjelű, mint a. Ennél fogva az $(1')$-beli jobb oldali különbségek – az előbbi esethez képest – a 0 értéket is felvehetik (de a-val ellentétes előjelű értéket nem), (3) és (4) helyére a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}&x_1\leqq x_2\leqq x_3\leqq\ldots\leqq x_{n-1}\leqq x_n\leqq x_1 &&(\text{ha } a>0),\ \text{ill.}\\ &x_1\geqq x_2\geqq x_3\geqq\ldots\geqq x_{n-1}\geqq x_n\geqq x_1 &&(\text{ha } a<0).\end{aligned}$$

Bármelyikük csak úgy állhat fenn, ha

$$x_1=x_2=\ldots=x_n,$$

tehát $(1')$-ben mindegyik jobb oldal értéke 0, és az ismeretlenek közös értéke az $f(x)=0$ egyenlet egyetlen gyöke, az (5) érték. Ez a megoldás egyértelmű.

γ) Az eddigiek alapján könnyű belátni, hogy a III. feltevés esetén az egyenletrendszernek két olyan megoldása van, amelyben minden ismeretlen értéke ugyanaz, éspedig az $f(x)=0$ egyenlet egyik, ill. másik gyöke:

$$x_1=x_2=x_3=\ldots=x_{n-1}=x_n=\frac{1-b+\sqrt{(b-1)^2-4ac}}{2a},$$

mert III. miatt a mondott értékek valósak és különbözők. Eszerint egynél több valós megoldás van.

Ezzel mindhárom állítást bebizonyítottuk.

Fazekas Béla (Pannonhalma, Bencés Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Példát mutatunk arra, hogy a III. feltevés esetén az egyenletrendszernek 2-nél több megoldása is lehet. $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{19}{2}$, $c=17$ esetén $(b-1)^2-4ac=\frac{33}{4}>0$, és a fentiek szerinti

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{21\pm\sqrt{33}}{6}$$

megoldásokon kívül $n=3$ esetén az egyenletrendszert az

$$x_1=4,\ x_2=3,\ x_3=2$$

értékrendszer is kielégíti (és természetesen a ciklikus fölcseréléssel adódó 3, 2, 4 valamint 2, 4, 3 megoldás is).

Fazekas Béla