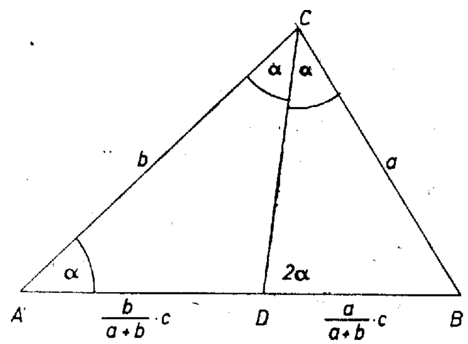
I. megoldás. Megmutatjuk, hogy ha egy háromszög egyik szöge kétszer akkora, mint egy másik szöge, akkor a kétszer akkora szöggel szemben fekvő oldal mértani középarányos a másik említett szöggel szemben fekvő oldal és a további két oldal összege között. A szokásos jelölésekkel: ha $\gamma = 2\alpha$, akkor

$$c^2 = a(a+b). \tag{1}$$

Legyen az ABC háromszög C-ből induló szögfelezője CD, ekkor az ACD háromszög egyenlő szárú, és D-nél levő külső szöge $CDB\sphericalangle = 2\alpha = ACB\sphericalangle$ (1. ábra).



1. ábra

Így két-két szögük megegyezése alapján ACB és CDB hasonló háromszögek:

$$CB : AB = DB : CB.$$

Itt a szögfelező osztásaránya alapján

$$DB = \frac{a}{a+b} \cdot c, \qquad \text{így}$$

$$a : c = \frac{a}{a+b} \cdot c : a,$$

amiből állításunk következik.

Esetünkben $c > a$ miatt csak $c = a+1$ vagy $c = a+2$ lehet. Az első esetben (1) alapján

$$b = \frac{c^2 - a^2}{a} = \frac{2a+1}{a} = 2 + \frac{1}{a},$$

és ez csak $a = 1$ esetén egész. Ekkor azonban $c = 2$ és $b = 3$, e három szám nem teljesíti a háromszög egyenlőtlenséget.

$c = a+2$ esetén b a nagyságra nézve középső oldal, $b = a+1$, és így (1)-ből

$$(a+2)^2 = a(2a+1), \qquad a^2 - 3a - 4 = (a+1)(a-4) = 0.$$

Ennek pozitív gyöke $a = 4$, és a feladat egyetlen megoldása: $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$.

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

II. megoldás. Legyen továbbra is $\gamma = 2\alpha$. A c, a oldalpárra a sinustételt, majd az a oldalra a cosinustételt alkalmazva

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc},$$

alkalmas rendezéssel

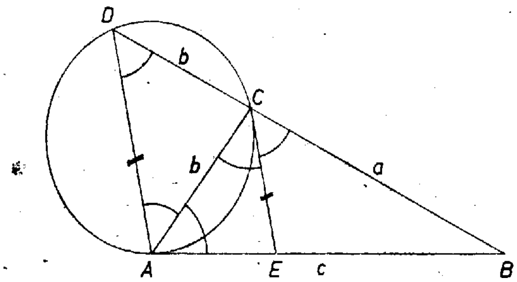
$$(b-a)c^2 = a(b^2 - a^2) = a(b-a)(b+a),$$

amiből ismét (1)-re jutunk, hiszen a vizsgálandó háromszögek nem egyenlő szárúak, egyszerűsíthetünk $b-a$-val. Tovább pedig az I. megoldás szerint haladhatunk.

Megjegyzések. 1. Látható, hogy az I. megoldás elemi meggondolásával egyszerűbben kaptuk (1)-et, mint a trigonometriai tételek alkalmazásával.

2. Könnyű belátni, hogy (1) megfordítása is helyes: ha (1) fennáll, akkor fennáll $\gamma = 2\alpha$ is; más szóval a háromszögben a $c^2 = a(a+b)$ és a $\gamma = 2\alpha$ összefüggés fennállása egymással ekvivalens állítások.

Mérjük rá BC-nek C-n túli meghosszabbítására a $CD = CA$ szakaszt, ekkor (1) miatt az ACD egyenlő szárú háromszög köré írt kör érinti az AB egyenest A-ban (2. ábra).



2. ábra

Ezért $CAB\sphericalangle = CDA\sphericalangle$, mint a rövidebb AC íven nyugvó kerületi szögek. Párhuzamost húzva C-n át DA-val az AB-vel való E metszéspontig,

$$BCE\sphericalangle = BDA\sphericalangle = CAD\sphericalangle = ACE\sphericalangle,$$

tehát $BCA\sphericalangle = 2 \cdot CDA\sphericalangle = 2 \cdot CAB\sphericalangle$, amint állítottuk.

Hasonlóan trigonometriai számítással is könnyen bizonyítható az állítás megfordítása.