Alább közöljük a haladók (II. osztályosok) versenyén kitűzött feladatok megoldásait.

I. forduló

1. feladat. *Valamely iskolában az év elején a leánytanulók létszáma 51-gyel kisebb, mint a fiúké. Év közben kimaradt 19 fiú és 41 lány, aminek következtében a év végén a lányok létszáma az összlétszám százalékaiban kifejezve 4%-kal kisebb, mint az év elején volt. Hány fiú- és hány lánytanuló volt az év elején?*

Megoldás: Jelöljük x-szel a lányok számát az év elején. Ekkor a lányok és fiúk száma az év elején, illetőleg év végén x és $x+51$, illetőleg $x-41$ és $x+32$. A lányok számát az összlétszám százalékában kifejezve a feladat feltétele a következő egyenletre vezet:

$$\frac{100x}{2x+51} = \frac{100(x-41)}{2x-9} + 4.$$

Az egyenletet 4-gyel osztva, a törteket eltávolítva és 0-ra redukálva, nyerjük, hogy gyökei megegyeznek a

$$-4x^2 + 466x + 52\,734 = 0,$$

vagy a

$$2x^2 - 233x - 26\,367 = 0$$

egyenlet gyökeivel, feltéve, hagy utóbbiak különböznek az eltávolított nevezők gyökeitől. A nyert egyenletnek egy pozitív és egy negatív gyöke van, amelyek közül csak az előbbi felel meg a feladat feltételeinek, tehát a lányok száma az év elején

$$x = \frac{233 + \sqrt{54\,289 + 210\,939}}{4} = \frac{233 + 515}{4} = 187,$$

(ami valóban nem gyöke az eltávolított nevezőknek), a fiúk száma pedig 238 volt. (A lányok év elején az összes tanulók 44%-át, az év végén a tanulók 40%-át tették ki.)

2. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$n^6 - n^2$$

osztható 60-nal, ha n természetes szám.

Megoldás: A vizsgálandó kifejezés

$$n^2(n^4-1) = (n^2-1)n^2(n^2+1) = (n-1)n(n+1)n(n^2+1).$$

Ha n egész szám, akkor itt az első három tényező három szomszédos egész szám. Ezek közül valamelyik osztható 3-mal.

Ha n páratlan, akkor az első és harmadik tényező, ha páros, akkor a második és negyedik osztható 2-vel, a szorzat tehát osztható 4-gyel.

Az első három tényező közül valamelyik osztható 5-tel is, ha n osztható 5-tel, vagy szomszédos egy 5-tel osztható számmal. Ha viszont n egy 5-tel osztható szám második szomszédja: $n = 5k+2$, akkor az utolsó tényező

$$n^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 4 + 1 = 5(5k^2 + 4k + 1)$$

osztható 5-tel.

Az $n^6 - n^2$ kifejezés tehát minden egész n-re osztható 3-mal, 4-gyel és 5-tel. Ebből következik, hogy 60-nal is osztható,[1] mert minden szám 60-nal osztva

$$60h + m$$

alakban írható, ahol $0 \le m \le 59$ a maradék. Mivel az első tag osztható 3-mal, 4-gyel és 5-tel, az összeg csak úgy lehet mindhárom számmal osztható, ha m is osztható mind a hárommal.

Csak a 0-ra és 5-re végződő számok oszthatók 5-tel és ezek közül is csak 0-ra végződők lehetnek 4-gyel oszthatók, tehát m lehetséges értéke csak

$$0,\ 10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50.$$

Ezek közül csak 0 és 30 osztható 3-mal, de az utóbbi nem osztható 4-gyel, tehát $m = 0$ és így minden 3-mal, 4-gyel és 5-tel osztható szám osztható 60-nal is. Ezzel bizonyítottuk a tétel állítását.

Megjegyzés. Az, hogy a 3-mal, 4-gyel és 5-tel való oszthatóságtól a szorzatukkal 60-nal való oszthatóságra következtethetünk, azon múlik, hogy e három szám közül semelyik kettőnek nincs 1-nél nagyobb közös osztója. Nem volna nehéz a kifejezés 4-gyel, 5-tel és 6-tal való oszthatóságát kimutatni, ebből sem következtethetnénk $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$-szal való oszthatóságra, amint hogy a kifejezés $n = 2$-re 60-at ad és ez mindjárt nem osztható 120-szal. Ebbe a hibába

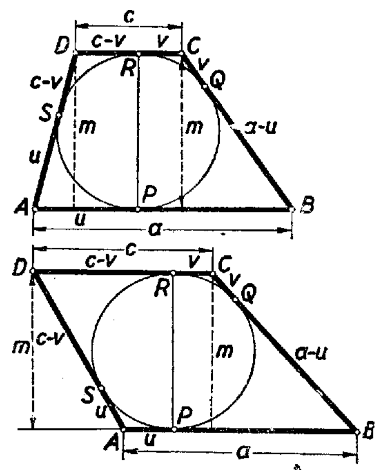
[1] Hivatkozhatnánk egyszerűen arra a tételre, hogy ha egy egész szám osztható olyan egész számokkal, amelyek páronként relatív prímek egymáshoz, akkor osztható ezek szorzatával is. A következő meggondolás azonban azt mutatja, hogy ezt konkrétan adott számok esetén könnyű közvetlenül igazolni.

többen beleestek, hogy két számmal való oszthatóságból a szorzatukkal való oszthatóságra következtettek, nem törődve a tényezők közös osztóival.

3. feladat. *Legyen az $ABCD$ trapéz érintőnégyszög. ($AB \parallel CD$). A beírt körhöz az átellenes A és C csúcsból húzott érintőszakaszok hossza legyen u ill. v. Bizonyítandó, hogy*

$$u \cdot CD = v \cdot AB.$$

I. megoldás: Jelöljük az AB és CD oldalak hosszát a-val és c-vel, az AB, BC, CD, DA oldalakon levő érintési pontokat P, Q, R, S-sel. Bocsássunk merőlegest a C és D pontokból az AB egyenesre (1. ábra).



1. ábra

Két derékszögű háromszög keletkezik, melyek átfogója a BC, ill. DA oldal, egyik befogója a trapéz m magasságával, másik pedig a BP és CR, illetőleg a DR és AP érintőszakaszok különbségének abszolút értékével egyenlő. Mivel a körhöz egy pontból húzott érintőszakaszok egyenlők, így

$$BP = BQ = a - u, \ DR = DS = c - v,$$

tehát a derékszögű háromszögekre Pythagoras tételét alkalmazva

$$(a-u+v)^2 = m^2 + |a-u-v|^2,$$
$$(u+c-v)^2 = m^2 + |u-(c-v)|^2.$$

Miután egy számnak és negatívjának a négyzete megegyezik, az abszolútérték-jeleket elhagyhatjuk. A második egyenletet az elsőből levonva az

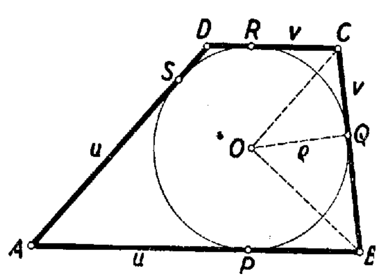
$$[a-(u-v)]^2 - [c+(u-v)]^2 = [a-(u+v)]^2 - [(u+v)-c]^2$$

összefüggéshez jutunk. Ebből a zárójelek felbontása és rendezés után kapjuk, hogy

$$4av = 4cu,$$

ami egyenértékű a bizonyítandó összefüggéssel.

II. megoldás: A beírt kör O középpontja a trapéz szögfelezőinek metszéspontja. Mivel a trapéz B-nél és C-nél levő szögeinek összege 180°, azért a BOC háromszög B-nél és C-nél levő szögeinek összege 90°, és így a háromszög O-nál derékszögű (2. ábra).



2. ábra

Az átfogóra bocsátott magasság a beírt kör sugara, ϱ. Így a derékszögű háromszögre vonatkozó középarányossági tételek szerint

$$\varrho^2 = BQ \cdot CQ.$$

Hasonlóan adódik a DOA háromszögből, hogy

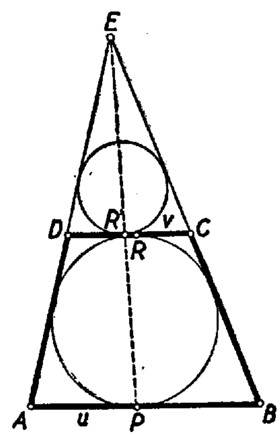
$$\varrho^2 = DS \cdot AS,$$

tehát a jobb oldalak is egyenlők. Felhasználva ezt és azt, hogy körhöz egy pontból húzott érintőszakaszok egyenlők, nyerjük, hogy

$$u \cdot CD = AS(DR + RC) = AS(DS + v) = AS \cdot DS + AS \cdot v = BQ \cdot CQ+$$
$$+AS \cdot v = BP \cdot v + AP \cdot v = AB \cdot v,$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

III. megoldás: Az állítás nyilvánvaló, ha $BC \parallel DA$, ezért feltehetjük, hogy a BC és DA oldalaknak mondjuk a C-n és D-n túli meghosszabbításai metszik egymást egy E pontban. Érintse a trapézba írt kör a párhuzamos oldalakat a P és R pontban, a CDE háromszögbe írt kör pedig a CD oldalt az R' pontban (3. ábra).



3. ábra

A trapézba írt kör a CDE háromszögnek hozzáírt köre, és egyben az ABE háromszögnek beírt köre. Ismeretes, a hozzáírt és beírt körre nézve a

$$CR = DR'$$

összefüggés.

Mivel az ABE és DCE háromszögek hasonlók és R' és P e hasonlóságnál egymásnak megfelelő pontok, így fennáll az

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AP}{DR'} = \frac{AP}{CR} = \frac{u}{v}$$

összefüggés, ami a bizonyítandó állításnak csak átrendezett alakja.

Megjegyzések. Sokan abból kiindulva bizonyították a tételt, hogy a párhuzamos oldalak érintési pontjait összekötő egyenes átmegy az átlók metszéspontján, vagy, hogy érintőnégyszögben az átlók és a szemközti oldalakon levő érintési pontokat összekötő egyenesek egy ponton mennek keresztül. Ez az állítás ugyan igaz, de bizonyítása sokkal nehezebb, mint a feladat állításáé. Mások viszont abból a hamis állításból indultak ki, mely szerint két négyszög hasonló volna, ha megfelelő szögeik egyenlők.

II. forduló

1. feladat. *Négy egész szám összege* 36. *Egy bizonyos n egész számot hozzáadva az első számhoz; n-net kivonva a második számból; n-nel szorozva a harmadik számot, és n-net osztva a negyediket, egyenlő eredményre jutunk. Melyik ez a négy szám, és mekkora n?*

Megoldás: A négy számot x, y, z, u-val jelölve feltétel szerint

(1) $$x + y + z + u = 36$$

(2) $$x + n = y - n = z \cdot n = \frac{u}{n}.$$

Célszerű (2)-ből azzal a két ismeretlennel fejezni ki a többit, amelyikkel ez csupán összeadás, kivonás, és szorzás segítségével sikerül; ez a z és n lesz, melyek szorzata szerepel (2)-ben:

$$x = zn - n, \qquad y = zn + n, \qquad u = zn^2,$$

és (1) bal oldalába beírva e kifejezéseket, a

$$2zn + z + zn^2 = z(n+1)^2 = 36$$

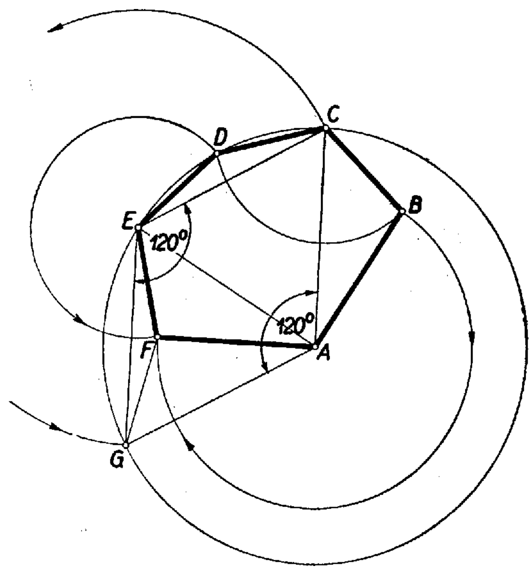
egyenletet kapjuk. Innen $(n+1)^2$ csak 1, 4, 9 vagy 36 lehet. Az ismeretlenek lehetséges értékeit az alábbi táblázatban tüntettük fel (tekintetbe véve, hogy az $n = 0$ értéket ki kell zárnunk).

$(n+1)^2$	1	4		9		36	
$n\ldots$	-2	1	-3	2	-4	5	-7
$z\ldots$	36	9	9	4	4	1	1
$x\ldots$	-70	8	-24	6	-12	0	0
$y\ldots$	-74	10	-30	10	-20	10	-14
$u\ldots$	144	9	81	16	64	25	49

Megjegyzés. Ha más két ismeretlennel fejezzük ki a többit, akkor is egész hasonlóan történhet a megoldás, csak nehezebbé válhat a szorzattá alakítás lehetőségének megtalálása. Emellett külön kell diszkutálni nevezőbe kerülő kifejezések eltűnésének az esetét is.

2. feladat. *Egy hatszög minden második szöge* $120°$*-os, és két-két* $120°$*-os szöget bezáró oldala egyenlő. Bizonyítandó, hogy a* $120°$*-os szögek csúcsai szabályos háromszöget alkotnak.*

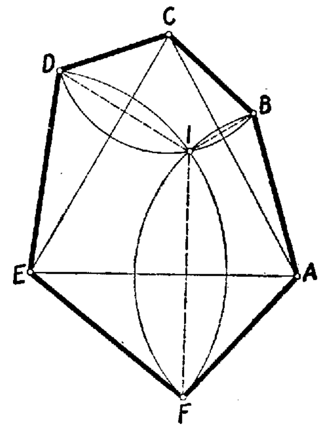
I. megoldás: Legyenek az $ABCDEF$ hatszög A, C és E csúcsoknál levő szögei $120°$-osak. Ekkor a másik három szög összege is $360°$; mert a hatszög szögeinek összege $720°$. Így az ABC háromszöget A körül elforgatva, míg AB a vele egyenlő AF oldalra kerül és hasonlóan a CDE háromszöget E körül ED oldalával EF-re forgatva, a BC és DC oldalak egy egyenesre fognak kerülni (4. ábra), és mivel a két oldal egyenlő, a C csúcs a két forgatásnál ugyanabba a G pontba kerül.



4. ábra

A keletkező AEG háromszög az AEC háromszög tükörképe az AE egyenesre nézve. Az elforgatás folytán keletkezett CAG és CEG szögek $120°$-osak, s így az AE szimmetriatengely az AC és EC oldalakkal $60°$-os szöget zár be, az ACE háromszög tehát szabályos.

II. megoldás: a) Az állítást konvex hatszögre igazoljuk. Az előző megoldás jelöléseit használva rajzoljunk A középpontú körívet F-en és B-n át a ($120°$-os) FAB szög szárai közé és hasonlóan C középpontú kör a BCD szög szárai közé B-n és D-n át. A két körívről az FB, ill. BD szakasz $120°$ alatt látszik, mert a látószögek $240°$-os középponti szöghöz tartozó kerületi szögek. (5. ábra).



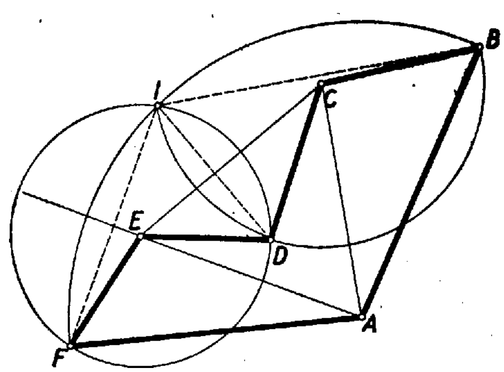
5. ábra

Belátjuk, hogy a két körív metszi egymást. A D pont az FAB $120°$-os szögtérben van, mert a hatszög konvex, továbbá az FB köríven kívül, mert különben az FDB szög legalább $120°$-os volna. Mivel a BCD és DEF egyenlőszárú háromszögek szárai közti szög $120°$, így ezeknek a D-nél levő szárai $30°$-osak, tehát a hatszög D-nél levő szöge $180°$-nál nagyobb volna, de ez lehetetlen, mert a hatszög konvex. Ugyanígy következik, hogy az F pont a BCD $120°$-os szögtérben van, a BD köríven kívül. A BD körív az FAB körcikk belsejébe indul a B pontból, mert az ABC szög a hatszög konvex volta miatt $180°$-nál kisebb. Így a két körív valóban metszi egymást egy I pontban. Ez a pont B tükörképe az AC egyenesre.

Az I pontból, mint láttuk, az FB és BD szakasz $120°$-os szög alatt látszik, s így ugyanakkora szögben látszik a DF szakasz vagyis az E középpontú, D-n és F-en áthaladó kisebb körív is átmegy I-n. Ebből következik, hogy az I pont D-nek is tükörképe a CE egyenesre és F-nek is tükörképe az EA egyenesre.

Az ACE háromszög oldalai a bizonyítottak szerint merőlegesek, az egymással $120°$-os szöget bezáró, IB, ID és IF szakaszokra s így szabályos háromszöget alkotnak.

b) Ha a hatszögben pl. a D csúcsnál levő szög $180°$-nál nagyobb, akkor D az FAB körcikkben van, s így a BD és DF körívek meghosszabbítása metszi az FB ívet egy közös I pontban (6. ábra).

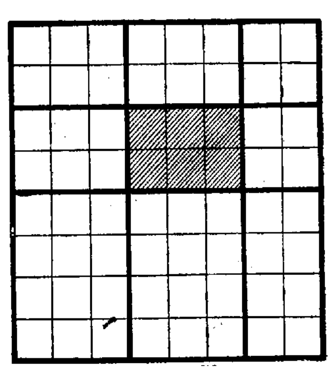


6. ábra

A bizonyítás ez esetben az előbbihez teljesen hasonló módon fejezhető be.

3. feladat. *Hány téglalap látható a sakktáblán? Ezek közül hány négyzet?*

Megoldás. Ha meghosszabbítjuk egy téglalap függőleges oldalait, kapunk a sakktáblán egy függőleges sávot. Hasonlóan a vízszintes oldalak egy vízszintes sávot határoznak meg. Fordítva, ha megadunk egy sakktáblamezőket elválasztó egyenesek határolta függőleges sávot és egy vízszinteset a sakktáblán, ezek egyértelműen meghatároznak egy téglalapot (7. ábra).



7. ábra

Így az összes téglalapok száma a függőleges és a vízszintes sávok számának szorzata.

Világos, hogy ugyanannyi a függőleges és a vízszintes sávok száma, tehát elegendő pl. az előbbieket összeszámolni. A sakktábla mezőit 9 függőleges egyenes határolja.

Ezek közül 9-féleképpen választhatjuk ki az első határvonalat, és 8-féleképpen a maradék közül a másodikat. Így azonban minden sávot kétszer, kapunk meg, tehát a függőleges sávok száma

$$\frac{9 \cdot 8}{2} = 36.$$

Ugyanannyi a vízszintes sávok száma is, tehát az összes téglalapok száma

$$36^2 = 1296.$$

Ezek között annyi négyzet van, ahányféleképpen ugyanolyan szélességű függőleges és vízszintes sávot párosíthatunk.

Egy h szélességű függőleges sáv baloldali határa nem lehet az utolsó h függőleges egyenes egyike sem, tehát a h szélességű sávok száma $9-h$, ennyi a vízszinteseké is, s így $(9-h)^2$ olyan négyzet van, amely h mező szélességű. Tehát a négyzetek száma ($h = 1,\ 2,\ \ldots,\ 8$) $8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 204$.