Alábbiakban közöljük a kezdők (I. osztályosok) versenyén kitűzött feladatok megoldásait.

Az I. forduló feladatai:

1. feladat. *Mennyi* a *%-os alkoholt kell hozzátöltenünk* b *liter* c *%-os alkoholhoz, hogy* d *%-os alkoholt kapjunk?*

Megoldás: Nyilvánvalóan csak akkor várható megoldása a feladatnak, ha d az a és c közé eső érték. Általában p %-os alkohol azt jelenti, hogy m liter oldatban

$$\frac{p \cdot m}{100}$$

liter alkohol van. Így, ha a b liter c % alkoholhoz x liter a %-os alkoholt adva, a keletkezett $b + x$ liter d %-os lesz, ekkor az alkoholtartalmat kétféleképpen kiszámítva

$$\frac{bc}{100} + \frac{ax}{100} = \frac{(b+x)d}{100}.$$

Innen, ha $d \neq a$

$$x = b\frac{d-c}{a-d}.$$

Ez x-re akkor ad pozitív értéket, ha $a - b$ és $d - c$ egyező előjelű, ami éppen azt jelenti, hogy d az a és c közé esik.

2. feladat. *Szerkesszünk háromszöget, ha ismeretes a kerülete* (k)*, egyik oldala* (c)*, és a másik két oldallal szemközti szögek különbsége* $(\alpha - \beta)$.

Megoldás: Jelöljük az adott szögkülönbséget δ-val. Ha a c oldal és a kerület adott, akkor ismert a másik két oldal összege $a + b$ is. A szerkeszthetőséghez természetesen szükséges, hogy

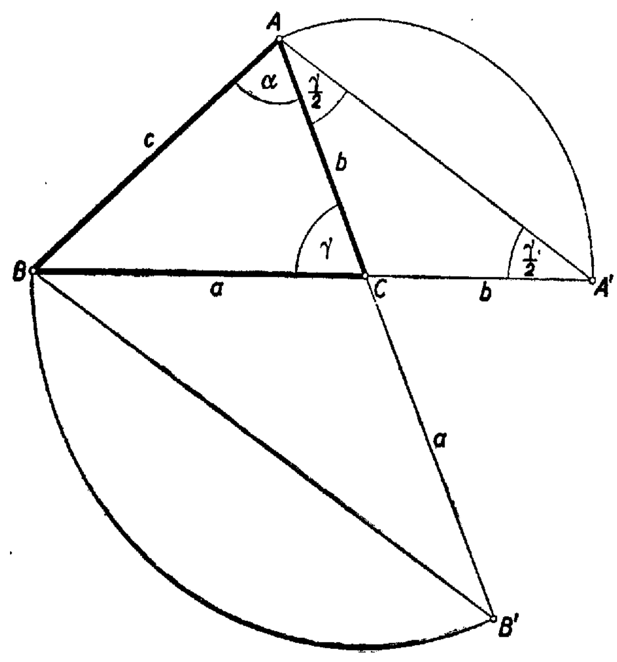
$$a + b = k - c > c,$$

azaz

$$2c < k$$

legyen.

Forgassuk rá egy tetszésszerinti ABC háromszögben pl. a $BC = a$ oldal meghosszabbítására a $CA' = b$ oldalt (1. ábra).



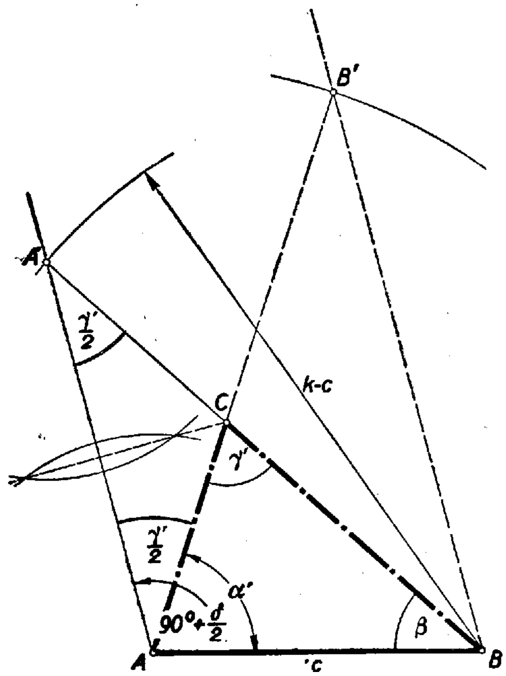
1. ábra

A keletkezett ACA' egyenlő szárú háromszög C csúcsánál levő külső szöge az ABC háromszög γ szöge, így az AA' alapon fekvő szögek $\frac{\gamma}{2}$ nagyságúak.

Számítsuk ki a keletkező ABA' háromszögben az A-nál levő szöget:

$$A'AB\sphericalangle = \alpha + \frac{\gamma}{2} = \alpha + \frac{180^\circ - (\alpha+\beta)}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha - \beta}{2} = 90^\circ + \frac{\delta}{2}.$$

Az $AA'B$ háromszögben ismert tehát két oldal és a nagyobbikkal szemközti szög, így ez egyértelműen megszerkeszthető. Az AA' oldal felező merőlegese metszi ki az $A'B$ oldalból a C pontot (2. ábra).



2. ábra

Ez a BA' oldal belsejére esik, mert az $A'AB$ szög tompaszög.

A keletkezett ABC háromszög kielégíti a feltételeket, mert – szögeit α', β', γ'-vel jelölve – az ACA' háromszög szerkesztés szerint egyenlő szárú, így az alapon fekvő szögei feleakkorák, mint a C csúcsnál levő külső szög, γ'. Ezért

$$\alpha' - \beta' = 90^\circ + \frac{\delta}{2} - \frac{\gamma'}{2} - \beta' = 90^\circ + \frac{\delta}{2} - \frac{180^\circ - (\alpha' + \beta')}{2} - \beta' = \frac{\delta}{2} + \frac{\alpha' - \beta'}{2}.$$

Innen

$$\alpha' - \beta' = \delta,$$

másrészt a C csúcsból induló oldalak összege

$$AC + CB = A'C + CB = A'B,$$

szintén az előírt $k - c$ érték.

Megjegyzés: Az AA' oldal a C csúcsból induló szögfelezővel párhuzamos, és ha az AC oldal meghosszabbítására mérjük rá a CB-vel egyenlő CB' távolságot, akkor ugyanúgy BB' is párhuzamos a szögfelezővel. (1. ábra). A szerkesztés ennek alapján úgy is befejezhető, hogy az $AA'B$ háromszög után ugyanarra az AB oldalra megszerkesztjük az ABB' háromszöget ($BB' || AA'$ és $AB' = k - c$) is. Ekkor C az AB' és $A'B$ oldalak metszéspontjaként adódik (2. ábra).

3. feladat. *Vonjuk le egy egész szám utolsó jegyének kétszeresét az utolsó jegy elhagyásával kapott számból (ha az egész szám egyjegyű, akkor 0-ból). Igazoljuk, hogy ha az eredmény osztható 7-tel, akkor az eredeti szám is mindig osztható 7-tel, ha viszont az eredmény nem osztható 7-tel, akkor az eredeti szám sem lehet 7-tel osztható.*

Megoldás: Az adott egész számot n-nel, utolsó számjegyét b-vel, az ennek elhagyásával keletkező számot a-val jelölve ($0 \leq b \leq 9$, $a \geq 0$) a feladat előírása szerint az

$$n = 10a + b$$

számhoz a

$$d = a - 2b$$

számot kell kiszámítani. Innen kiküszöbölhetjük pl. b-t úgy, hogy d-t hozzáadjuk n kétszereséhez:

$$2n + d = 21a.$$

A jobboldal osztható 7-tel, azért a baloldali összegnek is oszthatónak kell lennie 7-tel. Ebből következik, hogy ha valamely tag osztható 7-tel, akkor a másik is. Ha tehát d osztható 7-tel, akkor $2n$ is osztható 7-tel, különben pedig nem.

Ebből továbbá következik a feladat állítása, mert tudjuk, hogy $2n$ akkor és csakis akkor osztható 7-tel, ha n osztható 7-tel. Világos, hogy ha n osztható 7-tel, akkor $2n$ is. Ha viszont n nem osztható 7-tel, akkor 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 maradékot ad, és a kétszerese ekkor rendre 2, 4, 6, 1, 3 illetőleg 5 maradékot ad, tehát szintén nem osztható 7-tel.

A II. forduló feladatai:

1. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$$

bármilyen pozitív vagy negatív (esetleg 0*) számokat jelentsen* a, b, c, d. *Mikor érvényes az egyenlőség jele?*

Megoldás: Képezzük a két oldal különbségét

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2 = a^2d^2+b^2c^2-2abcd = (ad-bc)^2 \geq 0,$$

a, b, c, d minden számbajövő értékére. Egyenlőség csak abban az esetben állhat fenn, ha

$$ad = bc.$$

Megjegyzés. 1. A bizonyítás a következő azonosság levezetésével történt:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

Ebből az itt bizonyított egyenlőtlenség mellett egy számelméleti érdekesség is leolvasható: ha itt a, b, c, d egész számokat jelentenek, akkor az azonosság azt fejezi ki, hogy ha két egész szám kifejezhető két négyzetszám összegeként ($m = a^2+b^2$ és $n = c^2+d^2$), akkor a szorzatuknak is megvan ez a tulajdonsága. Ez lényeges segítséget nyújt annak a kérdésnek vizsgálatában, hogy mely számok állíthatók elő két négyzetszám összegeként (lásd idevonatkozóan pl. Matematikai Versenytételek II. részben az 1938. évi 1. feladathoz fűzött jegyzetet).

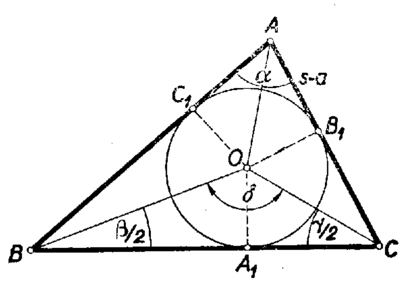
2. Könnyen igazolható a felhasznált azonosság következő általánosítása:
$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_k^2)-(a_1b_1+a_2b_2\ldots+a_kb_k)^2 = (a_1b_2-a_2b_1)^2+ +(a_1b_3-a_3b_1)+\ldots+(a_1b_k-a_kb_1)+(a_2b_3-a_3b_2)^2+\ldots+(a_kb_{k-1}-a_{k-1}b_k)$,
amiből leolvashatjuk az

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2)(b_1^2+b_2^2)+\ldots+b_k^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_kb_2)^2$$

nevezetes Cauchy-féle egyenlőtlenséget. Itt egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha a b_i-k a megfelelő a_i-ből minden egyes i-re ugyanazon c számmal való szorzással keletkeznek.

2. feladat. *Szerkesszünk háromszöget, ha adva van a kerülete* 2s*, a beírt kör sugara* ϱ*, és szögeik szöge* α*.*

I. megoldás: Legyenek a háromszög csúcsai A, B, C, az ezeknél fekvő szögek α, β, γ. Mivel a beírt kör O középpontját a szögfelező metszéspontja adja, ezért az $a = BC$ oldal látószöge az O pontból (3. ábra)



3. ábra

(1) $$\delta = 180° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 180° - \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\alpha}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}.$$

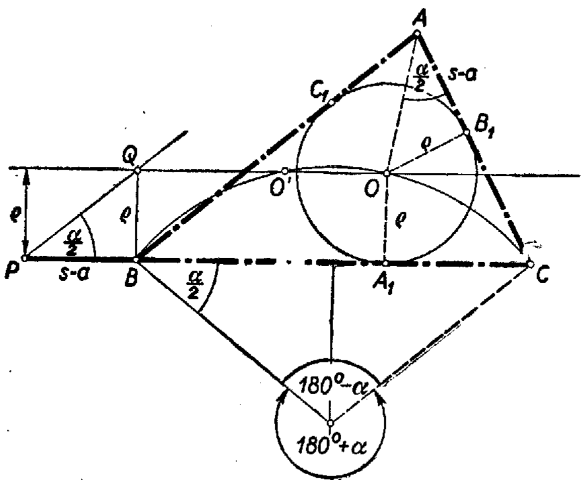
Ez a szög tehát α ismeretében megszerkeszthető. Azt is tudjuk, hogy O a BC oldaltól ϱ távolságra van, így a szerkesztés elvégezhető, ha a-t meg tudjuk szerkeszteni. Legyenek a beírt kör érintési pontjai a BC, CA, AB oldalon A_1, B_1, C_1, akkor ismeretes, hogy

(2) $$AB_1 = AC_1 = s - BC = s - a.$$

(Valóban a körhöz egy pontból húzott érintő egyenlő volta miatt

$$s = AB_1 + BC_1 + CA_1 = AB_1 + CA_1 + A_1B = AB_1 + a.)$$

Ezzel a következő szerkesztéshez jutottunk: Rajzoljunk $\frac{\alpha}{2}$ nagyságú szöget, csúcspontját jelöljük P-vel (4. ábra).



4. ábra

Húzzunk az egyik szárával párhuzamos egyenest ϱ távolságban, amely metszi a másik szárat egy Q pontban. Az előbbi szárra mérjük rá a P csúcstól a $PC = s$ távolságot, a Q-ból PC-re bocsátott merőleges talppontja legyen B. Rajzoljuk meg azt a körívet, amelyből a BC szakasz $90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$ szög alatt látszik. Messe ez az először húzott párhuzamost O és O' pontokban. Rajzoljunk pl. O körül ϱ sugarú kört. Az ehhez B-ből és C-ből húzott érintők A metszéspontja lesz a keresett háromszög harmadik csúcspontja. (E két érintő szükségképpen metszi egymást, a BC ugyanazon az oldalán, amelyen a kör van. Ugyanis ezen érintőknek a BC szakasszal bezárt, a kör oldalán fekvő szögei $2 \cdot OBC\sphericalangle$, illetőleg $2 \cdot OCB\sphericalangle$, és e két szög összege $180^\circ - \alpha$.)

Csak az így kapott háromszög felelhet meg a feladat feltételeinek, tehát nincs megoldása a feladatnak, ha a látókörív nem metszi a ϱ távolságban húzott párhuzamost.

Az ABC háromszög valóban megfelel a feltételeknek, mert beírt körének sugara ϱ, ennek a középpontjából a BC oldal $90 + \dfrac{\alpha}{2}$ szög alatt látszik, s így az A csúcsnál fekvő α' szögre (1) szerint

$$90^\circ + \frac{\alpha'}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}, \qquad \alpha' = \alpha.$$

Végül a beírt kör érintési pontját a CA oldalon B_1-gyel jelölve, a szerkesztett háromszög s' kerületére (2) szerint

$$s' = AB_1 + BC.$$

De az AOB_1 és PQB derékszögű háromszögek egybevágók, mert A-nál, illetőleg P-nél fekvő hegyesszögük $\dfrac{\alpha}{2}$, és az ezzel szemközti befogó mindkét háromszögben ϱ. Így

$$AB_1 = PB.$$

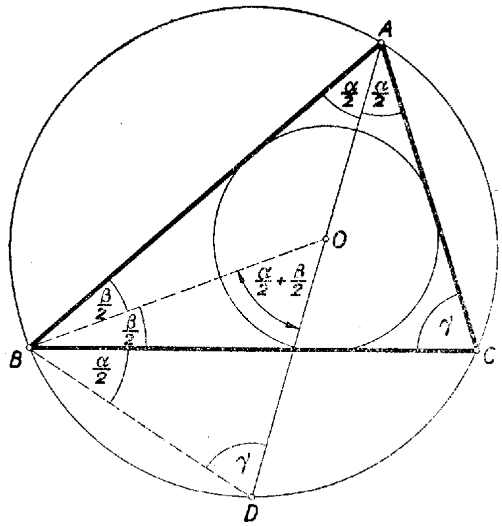
Ennélfogva

$$s' = PB + BC = s$$

a szerkesztés szerint.

Ha O helyett az O'-ből kiindulva fejezzük be a szerkesztést, akkor ABC-vel egybevágó megoldást kapunk, mert O és O' szimmetrikus a BC szakaszt felező merőlegesére.

Megjegyzés. Legyen az ABC háromszög köré írt kör A-t nem tartalmazó BC ívének felezőpontja D (5. ábra).



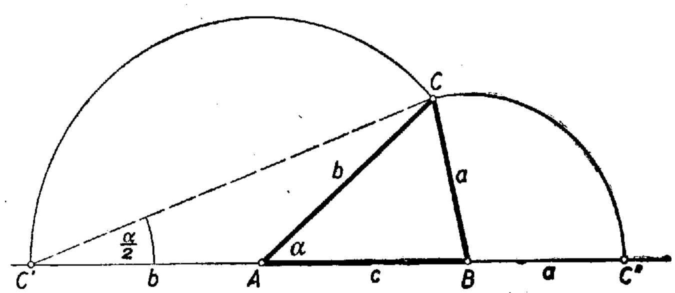
5. ábra

Tudjuk, hogy az A csúcsnál fekvő szög felezője átmegy D-n, és egyszerű szögszámítás adja, hogy a BDO háromszög egyenlő szárú: $DB = DO$. Így B, O és C egy D középpontú körön vannak. Ez éppen a fenti megoldásban használt látókörív.

Mivel a megszerkesztése után, α ismeretében a körülírt kör megszerkeszthető, így a D pont is. E körül B-n és C-n át körívet rajzolva, annak egyik metszéspontját a BC-től ϱ távolságra húzott párhuzamossal kössük össze D-vel. Ez metszi ki a körülírt körből A-t. Többen választották ezt a szerkesztési utat. Ehhez természetesen megfelelően kell módosítani annak bizonyítását is, hogy az ABC háromszög megfelel a feladat feltételeinek. (Lásd a jelen számban kitűzött 372. gyakorlatot.)

II. megoldás: Forgassuk le egy ABC háromszög oldalait pl. az AB oldal meghosszabbítására (6. ábra)

$$AC' = AC, \quad BC' = BC.$$

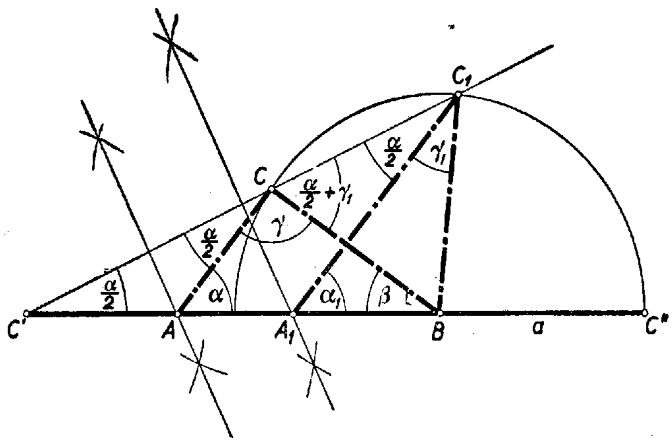


6. ábra

Ha az A csúcsnál levő szög α, akkor a CAC' háromszög egyenlő szárú voltából következik, hogy

$$CC'A\sphericalangle = CC'C''\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}.$$

Az előző megoldásban láttuk, hogy a $BC = a$ oldal az adatokból megszerkeszthető, így megszerkeszthető a BCC' háromszög is a következő módon: Miután a-t megszerkesztettük, mint az előző megoldásban, mérjük fel egy egyenesre $C'C'' = 2s$ távolságot, ennek C' végpontjában az $\frac{\alpha}{2}$ szöget, a C''-től a távolságra levő B pont körül pedig rajzoljunk a sugárral kört (7. ábra).



7. ábra

E körnek a szög másik szárával való valamelyik metszéspontja – ha van ilyen – legyen C. A CC' szakasz felező merőlegese metszi ki a $C'C''$ szakaszból az A pontot.

Az ABC háromszög valóban megfelel a feltételeknek, mert szerkesztés szerint a CAC' háromszög egyenlő szárú, így $CA = C'A$, és a háromszög A-nál levő külső szöge

$$CAC''\sphericalangle = 2 \cdot CC'A\sphericalangle = \alpha.$$

Ez az ABC háromszög belső szöge kell, hogy legyen. Ugyanis a szerkeszthetőséghez szükséges, hogy $a < s$ legyen. Ez esetben C' az a sugarú B középpontú körön kívül van. Ha a kör és a $C'C$ egyenes másik metszéspontját C_1-gyel jelöljük, akkor a CC_1 szakasz felező merőlegese B-n megy át; mivel pedig CC' (és C_1C') felezőpontja C' és a C_1C szakasz felezőpontja közé esik, így A-nak is C' és B közé kell esnie. $CAC''\sphericalangle$ tehát az ABC háromszögnek valóban belső szöge. A háromszög kerülete:

$$CA + AB + CB = C'A + AB + BC'' = 2s.$$

Így az I. megoldás (1) szerint a beírt kör érintési pontja A-tól $s-a$ távolságra van. Ebből, mivel a beírt kör középpontja az α szög felezőjén van, a megszerkesztése szerint következik, hogy a beírt kör sugara olyan derékszögű háromszög befogója, melynek ezzel szemközti szöge $\frac{\alpha}{2}$, a másik befogója pedig $s-a$. Mivel a-t egy ugyanilyen háromszög segítségével szerkesztettük, melynek emellett kérdéses befogója ϱ hosszúságú, így a megszerkesztett háromszög beírt körének sugara ϱ. A háromszög tehát megfelel a feladat feltételeinek.

Azt állítjuk, hogy ha C helyett C_1-ből kiindulva szerkesztünk egy A_1BC_1 háromszöget, ez az előbbivel egybevágó lesz (a megfelelt csúcsok A, C és B). Valóban A_1 is C' és B közé esik. Essék mondjuk a C a C' és C_1 pontok közé, és jelöljük az ABC és A_1BC_1 háromszögek szögeit α, β, γ, illetőleg α_1, β_1, γ_1-gyel. Szerkesztés szerint $\alpha_1 = \alpha$ a megadott szög.

A BCC_1 egyenlő szárú háromszögből

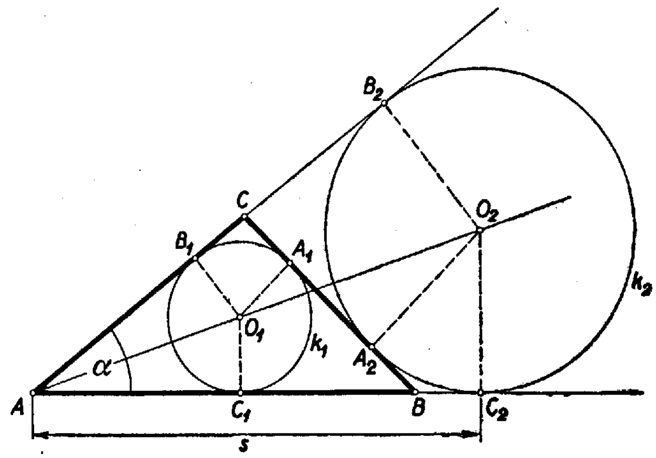
$$BCC_1\sphericalangle = BC_1C\sphericalangle = \gamma_1 + \frac{\alpha}{2},$$

így a C-nél keletkező szögek összege

$$180^\circ = C'CA\sphericalangle + ACB\sphericalangle + BCC_1\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \gamma + \gamma_1 + \frac{\alpha}{2} = \alpha + \gamma + \gamma_1,$$

tehát $\gamma_1 = \beta$. Az ABC és A_1C_1B háromszögek tehát hasonlók, mivel pedig BC és C_1B oldaluk egyenlő, tehát egybevágók is.

III. megoldás: Rajzoljuk meg a háromszög BC oldalához hozzáírt kört is. A betűzést a 8. ábra mutatja.



8. ábra

Ismeretes, hogy ekkor

(3) $$AB_2 = AC_2 = s.$$

(Valóban a körhöz egy pontból húzott érintők egyenlősége folytán

$$2AB_2 = AB_2 + AC_2 = AC + CA_2 + AB + BA_2 = AC + AB + BC = 2s.)$$

Ez a következő szerkesztéshez vezet: Szerkesszünk α nagyságú szöget, csúcsa legyen A, és szerkesszük meg a két szárat érintő ϱ sugarú k_1 kört. Mérjük rá a szög egyik szárára az $AC_2 = s$ távolságot, és szerkesszük meg azt a k_2 kört, amelyik mindkét szárat érinti, egyiket C_2-ben. Húzzuk meg a két kör egyik közös belső érintőjét, messe ez a szög szárait B és C pontokban.

ABC a keresett háromszög, mert A-nál levő szöge α, beírt körének sugara ϱ, és a (3) összefüggésből következik, hogy kerülete $2s$.

A másik belső közös érintő meghúzása nyilvánvalóan a megszerkesztettel egybevágó háromszöghöz vezet.

3. feladat. *A községből egy nő* 10 *óra* 31 *perckor elindult és egyenletesen haladva* 13 *óra* 43 *perckor érkezett* B *községbe. Ugyanezen a napon* B*-ből* 9 *óra* 13 *perckor indult el egy férfi ugyanazon az úton, és állandó sebességgel* 11 *óra* 53 *perckor ért* A*-ba. Útközben egyszerre értek egy hídhoz, amelyet a nő (miután egymás mellett elhaladtak)* 1 *perccel később hagyott el, mint a férfi. Mikor értek a hídhoz és hol vannak a híd végpontjai?*

I. megoldás: Az egész utat a nő 192 perc alatt tette meg, a férfi 160 perc alatt. Mivel mindketten egyenletesen haladnak, azért ugyanakkora út megtételéhez a nőnek és férfinak szükséges idők aránya mindig

$$\frac{192}{160} = \frac{6}{5}.$$

Jelöljük a híd végigjárásához a férfinek szükséges időt – percekben – t-vel, ekkora nő a feltétel szerint $t+1$ perc alatt jut át a hídon, és így

$$\frac{t+1}{t} = 1 + \frac{1}{t} = \frac{6}{5}, \qquad t = 5 \text{ perc.}$$

A híd hosszát távolságegységnek választva, az egész út hossza (a férfi menetidejéből számítva)

$$160 : 5 = 32 \text{ hídhossz.}$$

A híd eléréséig a nő és a férfi együtt 31 hídhossznyi utat tett meg. Ha a nő útja ebből x hídhossz volt, akkor, mivel a nő egy hídhosszat 6 perc alatt tesz meg, azért $6x$ idő alatt ért a hídhoz. A férfi 78 perccel korábban indult el, mint a nő, és $(31-x)$ 5 percig ment, míg a hídhoz ért. Mivel egyszerre értek a hídhoz, azért

$$6x = (31-x)5 - 78,$$
$$x = 7.$$

Eszerint a nő (és ugyanakkor a férfi is) a nő elindulásától számított $6x = 42$ perc múlva ér a hídhoz, vagyis mindketten 11 óra 13 perckor érik el a hidat.

A híd A felőli hídfője 7 hídhossznyira van A-tól és így a másik hídfő 24 hídhossznyira B-től.

II. megoldás: A férfi 160 perc alatt teszi meg az egész utat és 78 perce gyalogol, mikor a nő elindul, tehát megtette már az út

$$\frac{78}{160} = \frac{39}{80}$$

részét, együtt tehát még az út $\frac{41}{80}$ részét teszik meg a találkozásig.

Mivel egyenletesen haladnak, mindketten, így sehességeik aránya

$$\frac{192}{160} = \frac{6}{5},$$

másszóval, ami utat a férfi 5 perc alatt tesz meg, azt a nő 6 perc alatt. Ebből mindjárt az is következik, hogy a hídon is 5, illetőleg 6 perc alatt haladnak át. A fenti arányt úgy is értelmezhetjük, hogy az ugyanazon idő alatt együttesen megtett útnak $\frac{5}{11}$-ét teszi meg a nő, $\frac{6}{11}$-ét a férfi. Így az egész útnak A-tól mért

$$\frac{5}{11} \cdot \frac{41}{80} = \frac{41}{176}$$

részénél találkoznak, és ez a hídnak A-tól mért $\frac{5}{11}$ részénél lesz. A híd hossza (a férfi menetidejéből számítva) az egész út

$$\frac{5}{160} = \frac{1}{32}$$

része, így a híd A-hoz közelebb eső vége A-tól az út

$$\frac{41}{176} - \frac{5}{11} \cdot \frac{1}{32} = \frac{77}{352} = \frac{7}{32}$$

részén, a túlsó vege pedig az út A-tól mért negyedrészére van.

A B-ből induló férfi a hídig terjedő utat, azaz az egész út $\frac{3}{4}$ részét $\frac{3}{4} \cdot 160 = 120$ perc $= 2$ óra alatt teszi meg, tehát mindketten 11 óra 13 perckor érnek a hídhoz.