Ez idén e versenyt március 6-án bonyolították le az egyes iskolákban a gimnáziumok és ipari technikumok III. és IV. osztályú tanulói részére változatlan feltételek mellett. Munkaidő 5 óra. Beadtak összesen 236 iskolában 3220 dolgozatot (tavaly 223/2823). Örvendetes a gimnáziumok számának megnövekedése (179-re 164-ről), viszont sajnálatos, hogy az ipari technikumok közül idén csak 57 indult a tavalyi 59-cel szemben.

A versenybizottság április 7-iki javaslata alapján 138 iskola 365 versenyzője – a dolgozatot beadók 11,3 %-a – került a II. (döntő) fordulóba (tavaly 136/341 – 12,1 %). Részletes adatok iskolafajok és megyék szerint az itt közölt táblázatban találhatók.

A döntőbe került 365 tanuló közül csak 202 (55,3 % – tavaly 43,4 %) lapunk feladatmegoldója, ami ismét mutatja, hogy még számos jóképességű tanuló van az országban, aki sikeresen vehetne részt a feladatmegoldói munkában.

A tavalyi versenyen helyezést nyert 26 III. osztályos tanuló 1 kivételével bekerült a döntőbe; a tavalyi Arany Dániel versenyen helyezést elért 32 II. osztályos tanuló közül 27-nek sikerült idén is a döntőbe jutnia.

Kimutatás az 1956. évi Rákosi Mátyás matematikai verseny I. fordulójáról megyék és iskolafajok szerint

Megyék és városok	Beadott dolgozatok						Döntőbe került					
	gimnázium		ip.technikum		összesen		gimnázium		ip.technikum		összesen	
	iskola	tanuló	iskola	tanuló	iskola	tanuló	iskola	tanuló	iskola	tanuló	iskola	tanuló
1. Baranya	6	150	2	7	8	157	2	6	2	5	4	11
2. Bács-Kiskun	8	82	1	2	9	84	3	9	1	1	4	10
3. Békés	11	104	1	17	12	121	3	5	–	–	3	5
4. Borsod	8	113	4	50	12	163	7	17	2	2	9	19
5. Csongrád	7	118	3	30	10	148	5	8	2	4	7	12
6. Fejér	4	34	3	32	7	66	1	7	2	3	3	10
7. Győr-Sopron	10	142	5	41	15	183	6	14	2	3	8	17
8. Hajdú-Bihar	9	116	4	45	13	161	9	19	2	2	11	21
9. Heves	4	80	1	19	5	99	3	7	–	–	3	7
10. Komárom	8	91	3	19	11	110	3	6	2	5	5	11
11. Nógrád	2	22	1	17	3	39	2	5	1	1	3	6
12. Pest	8	96	1	8	9	104	7	14	1	1	8	15
13. Somogy	6	64	1	15	7	79	4	11	–	–	4	11
14. Szabolcs	8	73	1	4	9	77	2	4	1	1	3	5
15. Szolnok	13	169	1	11	14	180	7	9	–	–	7	9
16. Tolna	7	90	–	–	7	90	3	9	–	–	3	9
17. Vas	8	88	1	1	9	89	2	5	–	–	2	5
18. Veszprém	7	118	2	37	9	155	5	17	1	1	6	18
19. Zala	2	26	1	17	3	43	2	4	–	–	2	4
Vidék	136	1776	36	372	172	2148	76	176	19	29	95	205
20. Budapest	43*	807	21	265	64	1072	35*	149	8	11	43	160
Összesen	179	2583	57	637	236	3220	111	325	27	40	138	365

*1 katonai középiskola és 1 orosz-magyar iskola.

Az alábbiakban közöljük az I. forduló három feladatát a megoldásokkal együtt.

1. feladat. *Legyenek a és a nála nagyobb b pozitív egész számok. Számítsuk ki az a és b közé eső, 7 nevezőjű, nem egyszerűsíthető törtek összegét.*

I. megoldás: A 7 nevezőjű törtek sorozata (a-t és b-t is közéjük sorolva)

$$\frac{7a}{7},\ \frac{7a+1}{7},\ \frac{7a+2}{7},\ \ldots,\ \frac{7b-1}{7},\ \frac{7b}{7}. \tag{1}$$

Azonban e, sorozat tagjai közül

$$\frac{7a}{7},\ \frac{7a+7}{7},\ \ldots,\ \frac{7b}{7}$$

egyszerűsíthető törtek, s a következő alakban írhatók

$$(2)\qquad a,\ a+1,\ \ldots,\ b.$$

Az a és b közé eső, 7 nevezőjű, nem egyszerűsíthető törtek összegét az (1) és (2) számsorozatok összegének különbsége adja.

Az (1) sorozat olyan számtani sorozat, amelynek első tagja a, különbsége $\frac{1}{7}$ utolsó tagja b. Ezekből az adatokból a tagok számát az n-edik tag ismert képlete felhasználásával nyerhetjük:

$$b = a + (n-1)\frac{1}{7}, \qquad \text{ahonnan} \qquad n = 7b - 7a + 1.$$

Így az (1) sorozat összege az összegképlet alapján:

$$S' = \frac{(7b-7a+1)(b+a)}{2}.$$

A (2) sorozat az a-val kezdődő és b-vel végződő természetes számok sorozata, ezért összegére közvetlenül adódik

$$s = \frac{(b-a+1)(b+a)}{2}.$$

Tehát a keresett tulajdonságú törtek összege

$$S = S' - s = \frac{(b+a)(7b-7a+1-b+a-1)}{2} = \frac{(b+a)(6b-6a)}{2} = 3(b^2-a^2).$$

II. megoldás: a és $a+1$ közé eső, 7 nevezőjű, 6 törtszám összege

$$\left(a+\frac{1}{7}\right) + \left(a+\frac{2}{7}\right) + \ldots + \left(a+\frac{6}{7}\right) = 6a + \frac{21}{7} = 6a+3.$$

Minden következő számközben a törtszámok egy-egy egységgel nőnek, tehát a 6 törtszám összege 6-tal nő.

Az a és b közé eső, 7 nevezőjű, nem egyszerűsíthető törtek összege ezért olyan számtani sorozat összege, amelynek első tagja $6a+3$, különbsége 6, tagjainak száma $b-a$.

Tehát az összegképlet alapján nyerjük

$$S = \frac{b-a}{2}\Big[2(6a+3)+(b-a-1)6\Big] = (b-a)(6a+3+3b-3a-3) =$$
$$= (b-a)(3a+3b) = 3(b^2-a^2).$$

III. megoldás: A számításba jövő, nem egyszerűsíthető törtek ugyan nem alkotnak számtani sorozatot, de összegüket először a tagok növekedő, azután fogyó sorrendjében egymás alá írva:

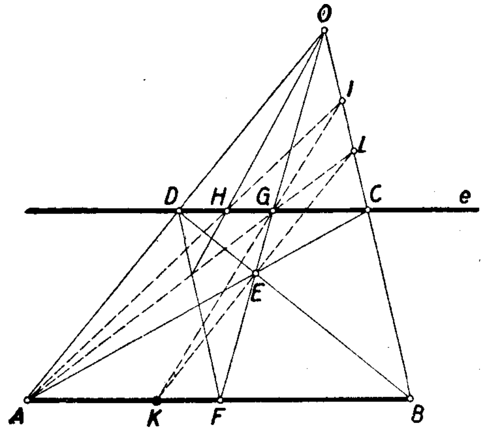
$$S = \left(a+\frac{1}{7}\right) + \left(a+\frac{2}{7}\right) + \ldots + \left(a+\frac{6}{7}\right) + \left(a+\frac{8}{7}\right) + \ldots + \left(b-\frac{2}{7}\right) + \left(b-\frac{1}{7}\right),$$
$$S = \left(b-\frac{1}{7}\right) + \left(b-\frac{2}{7}\right) + \ldots + \left(b-\frac{6}{7}\right) + \left(b-\frac{8}{7}\right) + \ldots + \left(a+\frac{2}{7}\right) + \left(a+\frac{1}{7}\right).$$

Az egymás alatt álló tagok összege mindig $b+a$, és két szomszédos egész szám között 6 ilyen tagpár van. Így nyerjük, hogy

$$2S = (b-a)\cdot 6\cdot (b+a) = 6(b^2-a^2), \qquad \text{vagyis} \qquad S = 3(b^2-a^2).$$

2. feladat. *Adva van egy egyenesszakasz és egy ezzel párhuzamos egyenes. Szerkesszük meg csak vonalzó segítségével a szakasz harmadrészét.*

I. megoldás: Legyen AB az adott szakasz és e az adott egyenes. Vetítsük az AB szakaszt egy tetszőleges O pontból az e egyenesre, a DC szakaszba. Az $ABCD$ pontok egy trapéz csúcspontjai. Ismeretes, hogy a trapéz nem-párhuzamos oldalainak metszéspontját az átlók metszéspontjával összekötő egyenes felezi a trapéz párhuzamos oldalait.

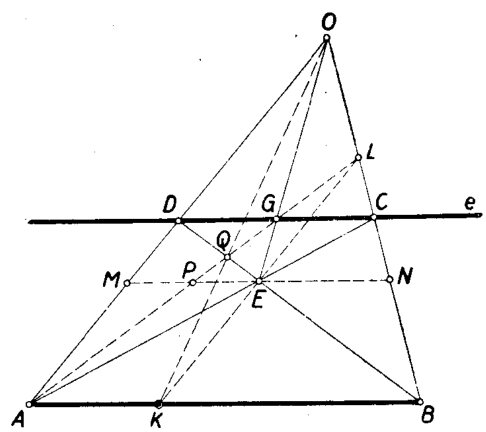


1. ábra

Az 1. ábrán az O pontot a trapéz AC és BD átlóinak E metszéspontjával összekötő egyenes az AB, illetve CD szakaszt az F, illetve G felezési pontokban metszi. Az $ABCD$ trapézzal kapcsolatosan most végzett szerkesztésnek az $AFGD$ trapézre való megismétlésével nyerjük a DG szakasz felezési pontját, a H pontot. Tehát a HG szakasz a HC szakasznak harmadrésze. Messe az AH egyenes az OB egyenest az I pontban, az I és G pontok összekötő egyenese az AB szakaszt a K pontban. Mivel az I pontból a HG és GC szakaszokat AK és KB szakaszokba vetítjük, ezért az AK szakasz az AB szakasznak harmadrésze. (Itt 10 egyenes vonalat használtunk fel a K pont szerkesztéséhez.)

Megjegyzés: Ha az O pont és e egyenes az AB szakasz által el vannak választva; akkor előfordulhat, hogy $AH \parallel OB$ (vagyis az I pont a végtelenbe kerül), akkor a G pontnak az AH (ill. OB) egyenessel párhuzamos vetülete szolgáltatja az AB szakaszon a keresett K pontot.

II. megoldás: Ha már megszerkesztettük a CD szakasz G felezési pontját, akkor egyszerűbben is célt érünk. Messe az A és G pontokat összekötő egyenes az OB egyenest az L pontban, akkor megmutatjuk, hogy az LE egyenes és az AB szakasz K metszéspontjára AK az AB szakasz harmadrésze (1. és 2. ábra).

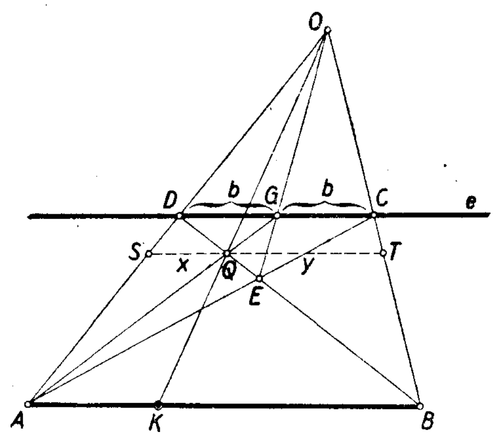


2. ábra

Ugyanis képzeljünk a trapéz átlóinak E metszéspontján át a párhuzamos oldalakkal párhuzamos egyenest, amely az OA és OB egyeneseket az M, illetve N pontban metszi (2. ábra). Ha az AG egyenes az utóbbi párhuzamost P pontban metszi, akkor $MP = PE$, mivel ezek a szakaszok az egymással egyenlő DG és GC szakaszoknak vetületei A-ból a párhuzamosra. Azonban ismeretes, hogy $ME = EN$, tehát PE a PN szakasz harmadrésze. Mivel végül L-ből a PE és EN szakaszokat az AK és KB szakaszokba vetítjük, ezért az AK szakasz valóban az AB szakasz harmadrésze. (Itt már 7 egyenessel célhoz jutottunk.)

Megjegyzés: Itt ugyanúgy előfordulhat mint az I. megoldásban, hogy $AG \parallel \parallel OB$. Ez esetben az E-nek AG-vel (ill. OB-vel) párhuzamos vetülete az AB szakaszon a keresett K pont.

III. megoldás: Ugyancsak 7 egyenest igényel a következő szerkesztés. A CD szakasz G felezőpontjának megszerkesztése után az AG és BD szakaszok Q metszéspontját kötjük össze az O ponttal (2. és 3. ábra). Az OQ egyenes metszi ki az AB szakaszból a keresett K harmadoló pontot.



3. ábra

Bizonyítás: Legyen $CG = GD = b$. Messe a Q ponton átmenő AB-vel párhuzamos egyenes az OA és OB egyeneseket az S, ill. T pontban (3. ábra). Legyen $SQ = x$, $QT = y$. A szögek egyenlősége miatt $AQS\Delta \sim AGD\Delta$, $BQT\Delta \sim BDC\Delta$, $ABQ\Delta \sim GDQ\Delta$.

Ennek alapján

$$x : b = AQ : AG = BQ : BD = y : 2b,$$

amiből

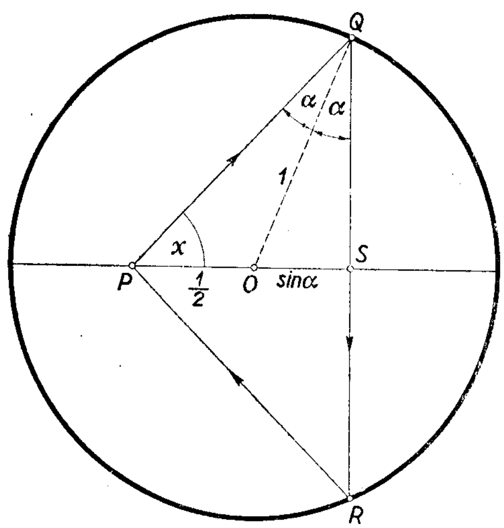
$$y = 2x,$$

és így az y és x szakaszokat O-ból az AB szakaszra vetítve a keletkező szakaszokra

$$KB = 2AK.$$

3. feladat. *Egy 2 méter átmérőjű köralakú biliárdasztal O középpontjától $\frac{1}{2}$ méterre fekvő P pontban van egy biliárdgolyó. A golyót úgy kell ellökni, hogy kétszeri visszaverődés után ismét P-n haladjon át. Mekkora szöget zár be ez esetben az ellökés iránya a PO iránnyal?*

I. megoldás: Jelöljük a visszaverődési pontokat Q és R-rel (4. ábra).



4. ábra

A $PQR\Delta$ egyenlőszárú és a szimmetria viszonyoknál fogva $PO \perp QR$. A beesési merőleges (a visszaverődési pontban a körérintőre merőleges egyenes) jelen esetben a QO körsugár. Legyen az $OQP\sphericalangle = OQR\sphericalangle = \alpha$, a PO egyenes metszéspontja QR-re legyen S, a keresett $OPQ\sphericalangle$-et jelöljük x-szel. Akkor $OS = \sin\alpha$, továbbá a feladat szerint $OQ = 1$, és $OP = \frac{1}{2}$.

Felhasználva a szögfelező-tételt

$$\frac{OS}{OP} = \frac{QS}{QP},$$

vagyis

$$2\sin\alpha=\cos 2\alpha.$$

De $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$, amely értéket a jobboldal helyére írva, és rendezve a

$$2\sin^2\alpha+2\sin\alpha-1=0 \tag{1}$$

goniómetriai egyenlethez jutunk. Ennek egyik gyöke 1-nél nagyobb abszolút értékű, a használható gyök

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\approx 0{,}3660,\qquad \text{és így}\qquad \alpha=21^\circ 28'.$$

(A tompaszögű megoldás ismét nem jön tekintetbe.)

Tehát a keresett szög

$$x=90^\circ-2\alpha=90^\circ-42^\circ 56'=47^\circ 4'.$$

II. megoldás: A szögfelező-tétel felhasználása nélkül is többféleképpen juthatunk az (1) egyenlethez. A legegyszerűbben úgy, hogy az OPQ háromszögre alkalmazzuk a sinus-tételt:

$$\sin x:\sin\alpha=1:\frac{1}{2},$$

amiből

$$\sin x=2\sin\alpha. \tag{2}$$

De $\sin x=\sin(90-2\alpha)=\cos 2\alpha=1-\sin^2\alpha$, amely értékét (2)-be írva, nyerjük az (1) alatti egyenletet.

Megjegyzés: Azzal a triviális esettel, midőn a golyót a PO irányban lökjük el és az már *egy* (és tetszés szerinti számú) visszaverődés után halad át ismét a P ponton, nem kell foglalkozni, mert ezt az esetet a feladat szövege tulajdonképpen kizárja.