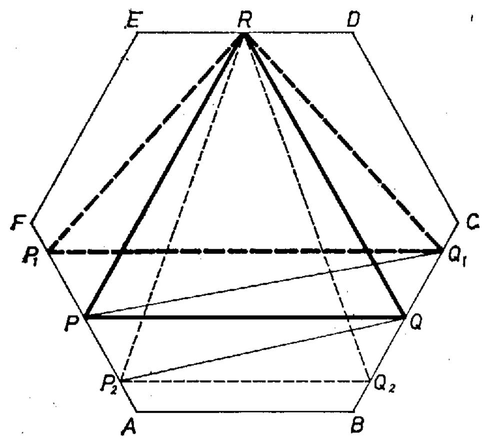
I. megoldás. Legyen az $S = ABCDEF$ szabályos hatszögbe beírt $H = PQR$ háromszögnek PQ oldala az AB oldallal párhuzamos úgy, hogy P az AF oldalon van, tehát Q a BC-n. Nyilvánvaló, hogy így akkor legnagyobb H területe, ha R a DE oldalon van, továbbá R-et a DE oldalon mozgatva (és PQ-t változatlanul hagyva) a terület nem változik. Ezért R-et rögzíthetjük DE felezőpontjában.

Megmutatjuk, hogy H területe akkor a legnagyobb, ha P felezi az AF oldalt: $PA = PF$. Legyen ekkor P_1 a PF szakaszon, és messe a rajta átmenő, AB-vel párhuzamos egyenes BC-t Q_1-ben.



1. ábra

Ekkor, minden idom területét ugyanúgy jelölve, mint magát az idomot (1. ábra):

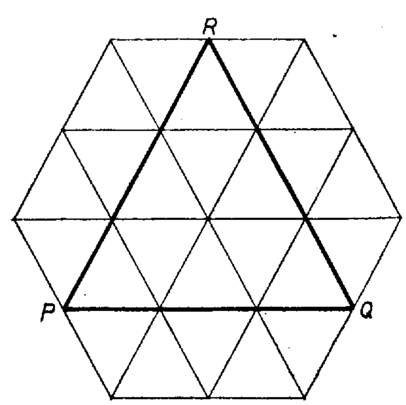
$$H_1 = P_1Q_1R = PQR + PP_1R + QQ_1R - QQ_1P - PP_1Q_1 =$$
$$= PQR - (PP_1Q_1 - PP_1R) < PQR = H,$$

hiszen a feltevés miatt $PR||BC$ és emiatt $QQ_1R - QQ_1P = 0$, másrészt $RQ||AF$ és Q_1 a QC szakaszon van, tehát messzebb van PP_1-től, mint Q és R, és így a zárójelbeli különbség pozitív, a kivonandó elhagyásával a kifejezést növeltük.

Hasonlóan ha P_2 a PA szakaszon van és $P_2Q_2||AB$, akkor Q_2 a BQ-n adódik és

$$H_2 = P_2Q_2R = PQR + PP_2Q + QQ_2P_2 - PP_2R - QQ_2R = PQR-$$
$$-(PP_2R - PP_2Q) - (QQ_2R - QQ_2P_2) < PQR = H,$$

mert az első zárójel 0, a második pozitív, hiszen P_2 közelebb van BC-hez, mint R és P.

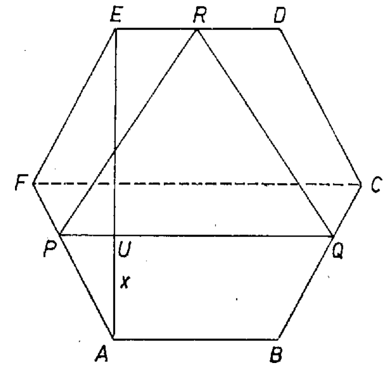


2. ábra

Ezek szerint az előírt tulajdonságú, legnagyobb területű H háromszög az S-nek $9/24 = 3/8$ részét teszi ki (2. ábra), ez a vizsgálandó arány legnagyobb értéke.

Ágoston Péter (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Legyen PQ távolsága AB-től $x(\leq AE/2 = AB\sqrt{3}/2)$, és messe PQ az AE-t U-ban (3. ábra).



3. ábra

Ekkor a szimmetriára tekintettel

$$PQR = \frac{1}{2} PQ \cdot UE =$$

$$= \frac{1}{2}(AB + 2PU)(AE - AU) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(AB + \frac{2}{\sqrt{3}}x\right)(AB\sqrt{3} - x) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{AB\sqrt{3}}{2} + x\right)(AB\sqrt{3} - x).$$

A változó tényezők összege állandó, így – mint ismeretes – szorzatuk akkor a legnagyobb, ha a két tényező egyenlő, amiből

$$x = \frac{AB\sqrt{3}}{4} = \frac{AE}{4},$$

vagyis PQ felezi AB és FC távolságát: $PA = PF$.

Takács Andor (Csurgó, Csokonai Vitéz M. Gimn., IV. o. t.)