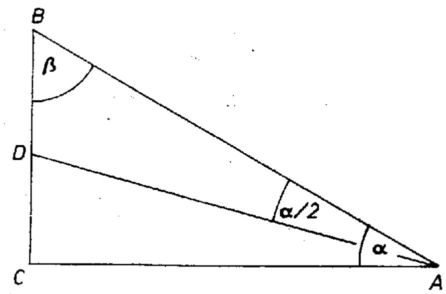
Megoldás. I. Legyenek a kérdéses ABC derékszögű háromszög befogói CA, CB úgy, hogy az A-ból induló AD szögfelezőre teljesül $AD : DB = k$.



A szögeket a szokás szerint jelölve az ABD háromszögből a sinustétel, valamint a kétszeres szögek függvényeire vonatkozó azonosság alapján egyenletet kapunk $\sin\frac{\alpha}{2}$-re:

$$k = AD : DB = \sin\beta : \sin\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha : \sin\frac{\alpha}{2} = \left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) : \sin\frac{\alpha}{2}, \tag{1}$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} + k\sin\frac{\alpha}{2} - 1 = 0, \tag{2}$$

és innen egyértelműen

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{k^2+8} - k\right)$$

(ugyanis a negatív gyököt mindjárt elhagytuk).

II. k-t természetesen pozitívnak tekintve minden értéke mellett kapunk háromszöget. Ugyanis $\frac{\alpha}{2} < 45^\circ$ miatt csak $0 < \sin\frac{\alpha}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ fogadható el, ez viszont minden $k > 0$ esetén teljesül, mert

$$\sqrt{k^2+8} < k + \sqrt{8},$$

ugyanis

$$\left(k + \sqrt{8}\right)^2 = k^2 + 8 + 2\sqrt{8} > k^2 + 8.$$

Így

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{k^2+8} - k\right) < \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

α-t kiszámítva egyértelműen megkapjuk β-t.

$$k = \frac{7}{2} \text{ esetén } \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}, \quad \cos\alpha = \frac{7}{8} = 0{,}875,$$

$$\alpha = 28^\circ 57', \quad \beta = 61^\circ 3'.$$

III. Az ABC háromszög egyenlő szárú, ha $\alpha = 45^\circ$, azaz (1) alapján, ha

$$k = \frac{\cos 45^\circ}{\sin 22{,}5^\circ} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 22{,}5^\circ} = 2\cos 22{,}5^\circ = 2\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2+\sqrt{2}} \approx 1{,}841.$$

(Az ABD háromszög pedig $k = 1$, azaz $\alpha = 60^\circ$ esetén egyenlő szárú.)

Graffjódi László (Miskolc, Földes F. Gimn., III. o. t.)
Körtvélyessy Péter (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Azt, hogy a (2)-ből $\sin\frac{\alpha}{2}$-re adódó pozitív érték mindig kisebb $\frac{1}{\sqrt{2}}$-nél, így is kapjuk: egyenletünk bal oldala $\sin\frac{\alpha}{2} = 0$ esetén -1, negatív, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ esetén pedig $\frac{k}{\sqrt{2}}$, pozitív, a gyök a két korlát között van. Ebben arra támaszkodtunk, hogy a bal oldal grafikonja a $0 \le \sin\frac{\alpha}{2} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ intervallumban folytonos vonal.