I. A 61 számjegyről szóló adat felhasználásával alsó és felső korlátot kapunk a keresett N szám 10-es alapú logaritmusára. Legyen lg N karakterisztikája k (nyilván $k \geqq 0$), mantisszája m. Eszerint

$$10^k \leqq N < 10^{k+1}$$

és $n \geqq 0$ esetén

$$10^{nk} \leqq N^n < 10^{n(k+1)},$$

tehát N^n számjegyeinek j_n számára fennáll

$$nk + 1 \leqq jn \leqq n(k+1),$$

hiszen a 10^a hatvány $a+1$ jegyű, ha a természetes szám, vagy 0. Ezt felírva az $n = 1, 2, \ldots, 6$ értékekre és az egyenlőtlenségeket összeadva

$$(1+2+\ldots+6)k + 6 = 21k + 6 \leqq j_1 + j_2 + \ldots + j_6 \leqq 21(k+1),$$

vagyis esetünkben

$$21k + 6 \leqq 61 \leqq 21(k+1), \tag{1}$$

amiből

$$k = 2,$$

tehát N háromjegyű szám, $100 \leqq N \leqq 999$.

A háromjegyű számokon végigmenve $N^2, N^3, \ldots, N^6$ számjegyeinek száma akkor ugrik 1-et–l-et, amikor m átlépi az 1/2, i11. az 1/3 és a 2/3, …, ill. az $1/6, 2/6, \ldots, 5/6$ értéket, mert így 2-szerese, 3-szorosa, … , 6-szorosa 1–1 újabb egész számot ad a hatvány karakterisztikájának növeléséhez. Esetünkben célszerűbb a háromjegyű számokon 999-től visszafelé haladni, mert az előírt 61 számjegy csak 2-vel kisebb az (1) szerint legnagyobb lehetséges 63-nál, amit a 999 feltehetően el is ér. Keressük ki ezért a mondott átlépési értékek közül a legnagyobb hármat: 5/6, 4/5, 3/4, állítjuk, hogy m az utóbbi kettő közé esik:

$$\frac{3}{4} \leqq m < \frac{4}{5}.$$

Így ugyanis többszöröseinek egész része rendre

$$[m] = 0, \qquad [2m] = 1, \qquad [3m] = 2, \qquad [4m] = 3, \qquad [5m] = 3, \qquad [6m] = 4,$$

ezért N^n karakterisztikája rendre

$$1 \cdot 2 + 0 = 2,\ 2 \cdot 2 + 1 = 5,\ 3 \cdot 2 + 2 = 8,\ 4 \cdot 2 + 3 = 11,\ 5 \cdot 2 + 3 = 13,\ 6 \cdot 2 + 4 = 16, \tag{2}$$

és N^n jegyeinek száma rendre

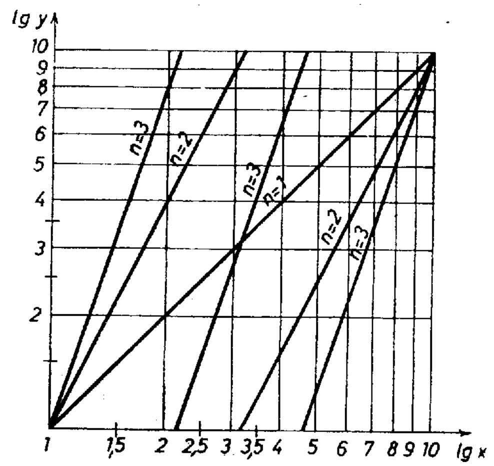
$$3, \qquad 6, \qquad 9, \qquad 12, \qquad 14, \qquad 17,$$

összegük 61. Mindezek szerint, tizedes törtekre áttérve

$$2{,}75 \leqq \lg N < 2{,}80, \tag{3}$$
$$562 < N < 632.$$

(Az iskolai függvénytáblázat szerint, 4 tizedesjegyre kerekítve lg 631 = 2,8000, tehát 631 is szóba jöhet, amennyiben ez az érték fölfelé van kerekítve.)

II. Tovább a hatványok kezdő jegyének 24-es összege alapján haladunk. A (3) intervallumbeli számokon végigmenve hatványaik nőnek, de jegyeik száma már nem nőhet, ezért a kezdő jegyek – hatványkitevőnként külön-külön – (tágabb értelemben) monoton növekednek. Célszerű ezért próbát tenni a (3)-ba eső és könnyen számítható 600 esetével. Kezdő jegyei egyeznek 6 hatványainak (6, 36, 216, 1296, 7776, 46 656) kezdő jegyeivel, ezek összege 23, tehát $N > 600$, és N-et tovább növelve csak egyetlen hatvány kezdő jegye növekedhet 1-gyel a még fennálló 24–23 hiány pótlására.



1. ábra

Szemügyre véve e hatványok második jegyét, N^5 és N^6-nál várható, hogy kezdő jegye leghamarabb éri el a 8-at, majd a 9-et, ill. az 5-öt. (Arra is gondoltunk, hogy nagyobb kitevő esetén a növekedés gyorsabb.) Ezért kiszámítjuk – (2) figyelembevételével – a $8 \cdot 10^{13}$ és $9 \cdot 10^{13}$ átlépési helyek ötödik gyökét és $5 \cdot 10^{16}$-nak hatodik gyökét. Ezek (logaritmusukból, ami rendre 2,7806, 2,7908, ill. 2,7832):

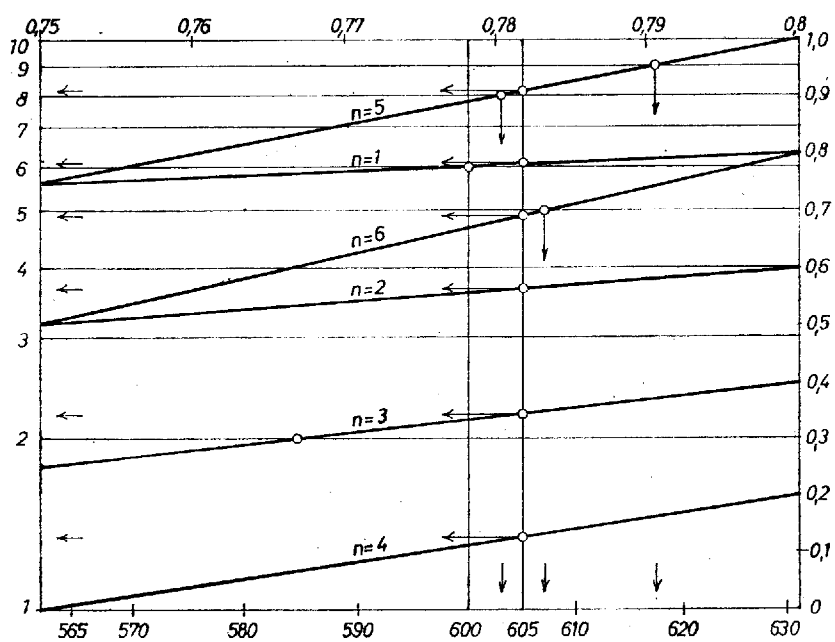
$$603{,}4, \qquad 617{,}7, \qquad 606{,}9,$$

tehát a kezdő jegyek összege 604 esetében ugrik 24-re és 607-nél már 25. Ezek között egyetlen páratlan számként $N = 605$ jön szóba. Valóban, normálalakban

$$605^2 = 3{,}66 \cdot 10^5, \quad 605^3 = 2{,}21 \cdot 10^8, \quad 605^4 = 1{,}34 \cdot 10^{11},$$
$$605^5 = 8{,}10 \cdot 10^{13}, \quad 605^6 = 4{,}90 \cdot 10^{16},$$

és itt a kezdő számjegyek különbözők, tehát a keresett szám valóban 605. (A kezdő jegyek különbözőségének követelményét csak ellenőrzésül használtuk fel.)

Galántai Aurél (Budapest, Bem J. Ip. Szakközépisk., IV.o. t.),
Máté András (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.) és
Balogi Zoltán (Debrecen, Fazekas M. Gimn., I. o. t.)
dolgozatai alapján, kiegészítésekkel



2. ábra

Megjegyzés. A kitűzésben ajánlott ábrázolás azért egyszerű, mert az $y = x^n$ függvény képe az ajánlott, ún. kétszer logaritmikus függvény-papíron egyenes vonal, hiszen $\lg y = n \cdot \lg x$. Az 1. ábráról $1 \leqq x \leqq 10$ és $n = 1, 2, 3$ esetére x^n kezdő számjegye olvasható le. A 2. ábra más léptékben a (3) intervallumra adja meg ezeket mind a 6 kitevőre, így más úton végezhetjük el a megoldásbeli próbákat.