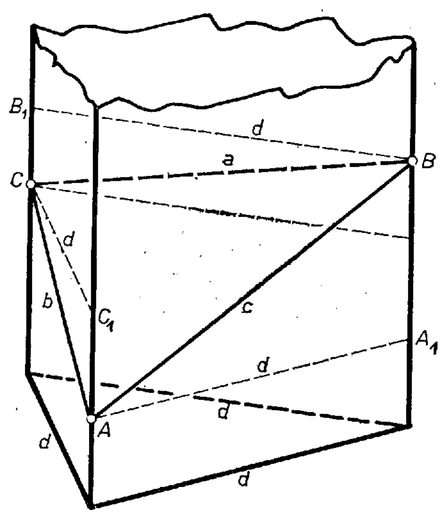
I. Legyen a metszet A csúcsának merőleges vetülete a B-t tartalmazó oldalélen A_1, ugyanígy B és C vetülete a C-t, ill. A-t tartalmazó oldalélen B_1, ill. C_1.



Így $AA_1 = BB_1 = CC_1 = d$, és az ABC háromszög csúcsainak magasságkülönbsége (a hasáb alapháromszögét vízszintes síkra téve) az ABA_1, BCB_1, CAC_1 derékszögű háromszögekből rendre

(1) $$A_1B = \sqrt{c^2 - d^2}, \quad B_1C = \sqrt{a^2 - d^2}, \quad C_1A = \sqrt{b^2 - d^2}.$$

Az a, b, c szakaszhosszak egyenértékű szerepet játszanak a feladatban, ezért föltehetjük, hogy nagyságviszonyuk:

$$a \leqq b \leqq c,$$

ezért

$$A_1B \geqq C_1A \geqq B_1C,$$

és ebből

$$A_1B = C_1A + B_1C,$$
$$\sqrt{c^2 - d^2} = \sqrt{b^2 - d^2} + \sqrt{a^2 - d^2},$$

hiszen a legnagyobb magasságkülönbség egyenlő a másik kettő összegével, az ACB törött vonaldarabon két lépésben ugyanannyit emelkedünk, mint a két végpontját összekötő egyenes szakaszon. Négyzetreemeléssel, átrendezéssel, újabb négyzetreemeléssel, végül 0-ra redukálva az egyenletet:

$$c^2 - d^2 = a^2 + b^2 - 2d^2 + 2\sqrt{(a^2 - d^2)(b^2 - d^2)},$$
$$d^2 + c^2 - a^2 - b^2 = 2\sqrt{(a^2 - d^2)(b^2 - d^2)},$$
$$d^4 + 2(c^2 - a^2 - b^2)d^2 + (c^2 - a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2 - 4(a^2 + b^2)d^2 + 4d^4,$$

(2) $$3d^4 - 2(a^2 + b^2 + c^2)d^2 + \left\{4a^2b^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2\right\} = 0,$$

ami d^2-re másodfokú egyenlet.

A diszkrimináns 1/4 része így alakítható:

$$D = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 12a^2b^2 + 3(c^2 - a^2 - b^2)^2 =$$
$$= 4(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2) =$$

(3) $$= (a^2 + c^2 - 2b^2)^2 + 3(c^2 - a^2)^2 \geqq 0,$$

tehát a d^2-re adódó értékek valósak (az utolsó lépésben az idézett megoldás egyik átalakítását fordított irányban alkalmaztuk).

Könnyű megmutatni másrészt az $U^2 - V^2 = (U - V)(U + V)$ szorzattá alakítás háromszori alkalmazásával, hogy az egyenlet d-t nem tartalmazó tagja egyenlő az ABC háromszög területe 4-szeresének négyzetével, tehát pozitív szám. d^2 együtthatója viszont negatív (és d^4 együtthatója pozitív), vagyis a két (valós) d^2 gyöknek a szorzata is, összege is pozitív, tehát mindkettő pozitív.

A (2) gyökei csak $D = 0$ esetén egyenlők, és ez csak akkor áll be, ha (3)-nak mindkét tagja 0, azaz $c^2 = a^2$, és így az első tagból $a^2 = b^2$, vagyis ha $a = b = c$. Ekkor, mint könnyen látható, d is egyenlő velük.

Ha viszont a, b és c nem mind egyenlők, akkor $D > 0$, és a d^2-re adódó nagyobbik érték nagyobb a^2-nél, tehát (1) szerint feladatunk szempontjából nem használható, eszerint a szabályos háromszög alapidom keresett oldalhosszára nézve egyértelműen

$$d^2 = \frac{1}{3}\left\{a^2 + b^2 + c^2 - 2\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2}\right\}. \tag{4}$$

II. Az 1527. feladatban az egyenes hasáb alapháromszögének oldalai voltak a, b, c, és a hasáb szabályos háromszög alakú (ferde) metszetének d oldalára kapott eredmény (4)-től csak a négyzetgyök előjelében tér el. Eszerint az a d érték – bár kissé más összefüggésekből kaptuk – számértékben egyenlő (2)-nek a nagyobbik gyökével.

Draschitz Rudolf (Budapest, Landler J. Gépip. Techn.)
Nagy Zsigmond (Budapest, Kaffka M. Gimn.)