Nyilvánvaló, hogy egy adott R_m szabályos m-szög két átlója akkor és csak akkor egyenlő, ha $2-2$ végpontjuk úgy osztja R_m kerületét 2–2 részre, törött vonalra, hogy e részek páronként R_m-nek ugyanannyi oldalából állnak. Pl. a $C_0C_1\dots C_{m-1}=R_m$-ben $C_iC_j=C_pC_q$ (ahol $0\leqq i<i+2\leqq j\leqq m-1$, és $0\leqq p<p+2\leqq q\leqq m-1$) akkor és csak akkor egyenlő, ha

$$j-i=q-p,\ \text{vagy}\ m-(j-i)=q-p.$$

Erre támaszkodva a C_iC_j átló hosszát a $j-i$ és $m-(j-i)$ számok kisebbikével jellemezzük. Nem okozhat félreértést, ha röviden azt mondjuk, hogy a C_iC_j átló hossza $j-i$, ill. $m-(j-i)$.

Megmutatjuk, hogy R_m háromszögelésében kiválasztható $n+1$ olyan átló, amelyek d_{n+1}, d_n, d_{n-1}, …, d_2, d_1 hosszai szigorúan monoton csökkenő sorozatot alkotnak; és $d_1\geqq 2$.

Ha R_m-nek O középpontján áthalad egy a háromszögelésben felhasznált átló, úgy ennek hosszát, $m/2$-t választjuk a kívánt d_{n+1} szám szerepére, ha pedig O a háromszögelés egy H háromszögének belső pontja, akkor H legnagyobb oldalának (legnagyobb oldalai egyikének) hosszát. (A „legnagyobb oldal" kifejezést tovább is mindig így értjük.) Az utóbbi esetben, amennyiben H-nak mindegyik oldala R_m-nek átlója, úgy hosszaik összege m, hiszen R_m-nek minden egyes oldalát H-nak egy oldala választja el O-tól, ezért a kiszemelt legnagyobb oldal hossza:

$$d_{n+1}\geqq\frac{m}{3}>2^n,\ \text{tehát}$$

$$2^n+1\leqq d_{n+1}\leqq\frac{m}{2}<3\cdot 2^{n-1}. \tag{1}$$

Könnyű belátni, hogy ez az eredmény akkor is érvényes, ha H valamelyik oldala az R_m-nek is oldala.

A további d_n, …, d_1 átlóhosszúságok egy-egy képviselőjének kiválasztásában R_m-nek a felére, ill. arra a kisebbik részére szorítkozunk, amelyet belőle a kiválasztott, d_{n+1} hosszúságú átló metsz le.

R_m eredeti háromszögelése a megtartott A_n részt is háromszögekre osztja, és a d_{n+1} átlót egyetlen további átló sem metszi át. Így A_n háromszögelésének egy H_n háromszöge a d_{n+1} átlóra támaszkodik. A d_n szám szerepére H_n további két oldala közül a nagyobbiknak a hosszát választjuk. Ez kisebb d_{n+1} nél, hiszen nem metszi le A_n és R_m kerülete közös részéből azokat az oldalakat, amiket H_n mellőzött oldala metsz le, ill. magát ezt az egy oldalt, ha az egyszersmind R_m-nek is oldala; másrészt a kiválasztás és (1) miatt

$$d_n\geqq\frac{d_{n+1}}{2},\qquad d_n\geqq 2^{n-1}+1.$$

Ezután A_n-nek arra az A_{n-1} részére szorítkozunk, amelyet a kiválasztott, d_n hosszúságú átló metsz le belőle.

Eljárásunkat még legalább $n-1$-szer megismételhetjük, mert az innen számított $n-1$-edik lépésben a meghagyott A_1 részidom d_2-re támaszkodó H_1 háromszögében a hosszabbik oldalra fennáll

$$d_1\geqq 2^0+1=2,$$

tehát még d_1 is átló. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Lempert László (Budapest, Radnóti M. Gimn.)

Megjegyzés. Az állítás nem élesíthető, mert $m=3\cdot 2^n$-t véve már nem minden felbontásban lép fel $n+1$ különböző átlóhosszúság. Pl. $n=0$ és 1 esetén $m=3$, ill. 6, és a szabályos háromszögben nem húzható átló, a szabályos hatszög pedig háromszögelhető csak egyféle hosszúságú átlókkal, 3 db rövidebb átlójával, középen egy szabályos háromszöget kialakítva.

Lempert László