Alább közöljük a haladók (II. osztályosok) versenyén kitűzött feladatok megoldásait:

I. forduló

1. feladat: *Igazoljuk, hogy*

$$\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}$$

egész szám.

I. megoldás: A gyökjel alatti kifejezések így alakíthatók át: $7+\sqrt{24}=6+2\sqrt{6}+1=(\sqrt{6}+1)^2$, és hasonlóan $7-\sqrt{24}=(\sqrt{6}-1)^2$. Mivel $\sqrt{6}>1$, így a gyökmennyiségek pozitív értékét véve

$$\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}=(\sqrt{6}+1)-(\sqrt{6}-1)=2.$$

ami valóban egész szám.

Célhoz érhetünk azonban a felhasznált átalakítás lehetőségének észrevétele nélkül is.

II. megoldás: A vizsgálandó érték pozitív. Számítsuk ki a négyzetét:

$$\left(\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}\right)^2=7+\sqrt{24}-2\sqrt{49-24}+7-\sqrt{24}=14-2\cdot 5=4.$$

Így a két gyök különbsége 2, ami valóban egész szám.

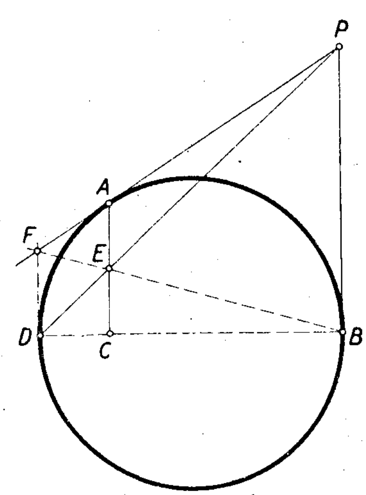
Jegyzet: Hasonlóan belátható, hogy ha $a>0$ és $0\le b\le a$, akkor

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2=2a\pm 2\sqrt{a^2-b}\,.$$

Megjegyzés: A legnagyobb hiba, amit a versenyzők egy része elkövetett az volt, hogy a négyzetgyökök értékét számította ki *közelítőleg tizedestörtekben,* és így vélte a kívánt igazolást szolgáltatni. – Igen sokan nem vették észre, hogy a vizsgálandó különbség pozitív, és értékének a »-2«-t is megadták.

2. feladat: *Adva van egy kör és a körön kívül fekvő* P *pont. Szerkesszünk* P*-től a körhöz érintőket, és jelöljük az érintési pontokat* A*-val és* B*-vel.* A *körnek* B*-vel átellenes pontja legyen* D. *Bocsássunk az* A *pontból merőleges egyenest a* BD *átmérőre, ennek talppontja legyen* C. *Bizonyítsuk be, hagy a* PD *egyenes felezi az* AC *szakaszt.*

I. megoldás: Legyen AC és DP metszéspontja E, továbbá messe a PA egyenes a kör D-ben húzott érintőjét F-ben (1. ábra).



1. ábra

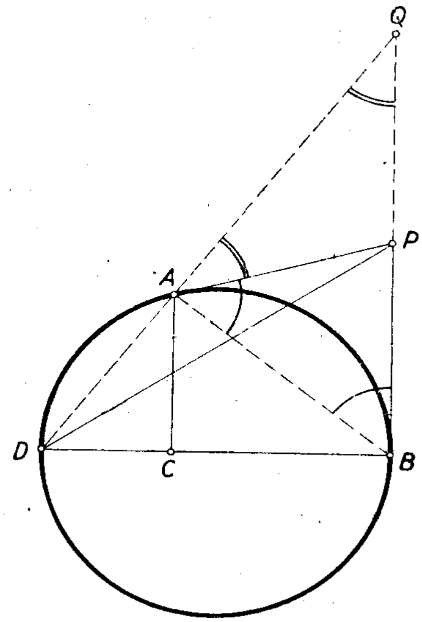
Bebizonyítjuk, hogy E a $BPFD$ trapéz átlóinak metszéspontja. Egyrészt

$$FD=FA \qquad \text{és} \qquad PA=PB,$$

mint egy pontból húzott érintők. Az átlók metszéspontja az átlókat a párhuzamos oldalak arányában osztja, ugyanúgy, mint A az FP szakaszt, tehát az A-t az átlók metszéspontjával összekötő egyenes párhuzamos a párhuzamos oldalakkal s így azonos az AC egyenessel.

Ismert tétel szerint[1] az átlók metszéspontja felezi a rajta át a párhuzamos oldalakkal párhuzamosan húzott szakaszt, s így a feladat állítását igazoltuk.

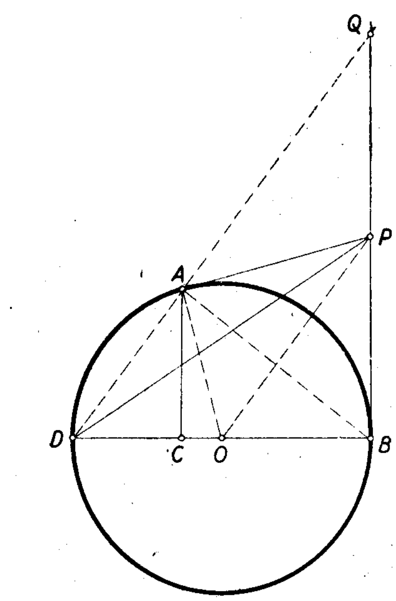
II. megoldás: Messe DA meghosszabbítása BP-t Q-ban (2. ábra).



2. ábra

Mivel az ABP háromszög egyenlő szárú, így az ABQ derékszögű háromszögben a PAQ és PQA szögek egyenlő szögeket pótolnak $90°$-ra vagyis az APQ háromszög is egyenlő szárú. Így $QP = PB$, tehát DP a BDQ háromszög súlyvonala, tehát felezi a BQ-val párhuzamos AC szakaszt is, és ez volt a bizonyítandó.

III. megoldás: Az AD egyenes párhuzamos a P pontot a kör O középpontjával összekötő egyenessel (3. ábra).



3. ábra

Ugyanis az AB egyenes merőleges AD-re. Thales tétele szerint, PQ-ra pedig azért, mert utóbbi szögfelezője, az előbbi pedig alapja az APB egyenlőszárú háromszögnek.

Mivel O felezi a BD szakaszt, ezért P is felezi a BP egyenesnek B-től az AD egyenessel való Q metszéspontjáig terjedő szakaszát. DP tehát súlyvonala a BDQ háromszögnek s így felezi a BQ-val párhuzamos AC szakaszt is. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

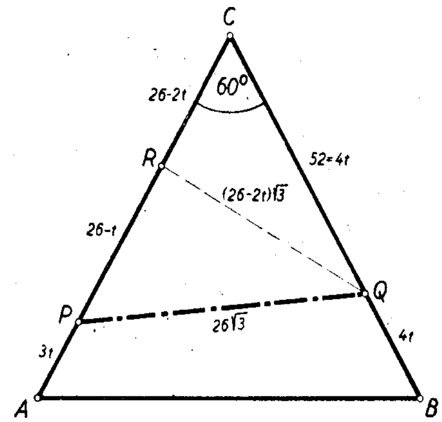
[1]Matematika gimnáziumok II. osztálya számára. Tankönyvkiadó 1953. 30. old.

Jegyzet: AD és PO párhuzamossága sok más úton is belátható, például így: az ADB kerületi szög fele az AOB középponti szögnek (3. ábra). Mivel a két szög B-n átmenő szárai egy egyenesbe esnek, így AD párhuzamos a középponti szög felezőjével, ez pedig a PO egyenes, mert a $PAOB$ négyszög deltoid.

Megjegyzés: Itt a leggyakoribb hiba az volt (mint az a bizonyítási feladatnál általában lenni szokott), hogy a bizonyítandó tétellel egyenértékű állítást használtak fel a versenyzők bizonyítás nélkül. Pl. az 1. ábrában *feltételezték,* hogy BE és FE szakaszok egy egyenesen vannak stb.

3. feladat: *Az* ABC *egyenlőoldalú háromszög oldala* 52 m. *A háromszög* A *és* B *csúcspontjából egyszerre indul egy-egy pont, az* AC *oldalon* 3 m/sec, *ill. a* BC *oldalon* 4 m/sec *egyenletes sebességgel és halad* C*-ig. Mikor lesz a két mozgó pont egymástól mért távolsága egyenlő a háromszög magasságával?*

Megoldás: Legyen t másodperc múlva az A-ból induló pont helyzete P, a B-ből indulóé Q. Jelöljük Q vetületét az AC egyenesen R-rel (4. ábra).



4. ábra

Számítsuk ki a PQR derékszögű háromszög befogóit.

$$QC = 52 - 4t,$$

s így a CQR 60°-os derékszögű háromszögből

$$CR = \frac{QC}{2} = 26 - 2t, \qquad QR = RC\sqrt{3} = \sqrt{3}(26 - 2t),$$

tehát

$$PR = 52 - 3t - (26 - 2t) = 26 - t.$$

A feladat követelménye szerint PQ-nak $26\sqrt{3}$ méternek kell lennie, ebből a

$$PQ^2 = QR^2 + PR^2 = 3(26 - 2t)^2 + (26 - t)^2 = 3 \cdot 26^2,$$
$$13t^2 - 14 \cdot 26t + 26^2 = 0$$

egyenlet adódik, vagy 13-mal osztva

$$t^2 - 28t + 52 = 0.$$

Innen

$$t_1 = 2, \qquad t_2 = 26.$$

A második gyök nem jön számításba, mert 26 másodperc múlva már mindkét pont a megfelelő oldal meghosszabbításán mozogna, így 2 másodperc múlva következik be a kívánt helyzet.

Megjegyzés: A versenyzők egy része nem jött rá arra, hogy $CR = \frac{1}{2}CQ$.

II. forduló

1. feladat: *Melyik az az időpont* 2 *és* 3 *óra között, amelyhez található* 6 *és* 7 *óra közötti időpont úgy, hogy a két időpontban az óramutatók állása – felcserélt mutatókkal – megegyezik.*

I. megoldás: A mutatóknak az óralapon megtett útját célszerű a teljes körüljárás 60-ad részével (a nagymutató 1 percnyi útjával) vagy 12-ed részével (a kismutató egy órai útjával) mérni.

A 2 és 3 óra közti mutatóállásnál legyen a kismutatónak a 2 órától kezdve megtett útja, a körüljárás 60-ad részében mérve x. Ekkor a kismutató a 12-es számtól $10 + x$ egységnyire van, a nagymutató pedig $12x$-nyire.

Ha 6 óra után y egységnyit mozdult el a kismutató a felcserélt mutatókkal ugyanezen álláshoz, akkor a második helyzetben a kismutató $30+y$-nyira a nagy pedig $12y$-nyira van a 12-estől. Feltétel szerint

$$10+x=12y,$$
$$12x=30+y$$

kell hogy legyen. Innen

$$x=\frac{370}{143}=2\frac{84}{143}, \qquad y=\frac{150}{143}=1\frac{7}{143}.$$

Tehát a keresett időpont

$$2 \text{ óra } 31\frac{7}{143} \text{ perc } (\approx 31 \text{ p } 2{,}9 \text{ mp}).$$

A megfelelő időpont 6 és 7 óra között

$$6 \text{ óra } 12\frac{84}{143} \text{ perc } (\approx 12 \text{ p } 35{,}2 \text{ mp}).$$

II. megoldás: Az ismeretlenek meghatározására abból is nyerhetünk egyenleteket, hogy bármely időpontban olyan arányban osztja a kismutató a két szomszédos egész órát jelölő szám közti ívet, mint amilyen a 12-es számtól az egyik és másik irányban a nagymutatóig terjedő ívek aránya.

Válasszuk egységnek a teljes kör 12-ed részét, a kérdéses mutatóállásnál legyen az egyik mutató a 2-es szám után x beosztással, a másik a 6-os után y beosztással. Ekkor a fenti megjegyzést a 2 és 3 óra közti időre vonatkoztatva

$$\frac{x}{1-x}=\frac{6+y}{6-y},$$

6 és 7 óra közötti mutatóállást tekintve pedig

$$\frac{y}{1-y}=\frac{2+x}{10-x}.$$

Ezekből

$$12x=6+y, \qquad 12y=2+x.$$

Ha még tekintetbe vesszük, hogy itt a mértékszámok ötödei az előző megoldásban szereplő x és y értékeknek, akkor láthatjuk, hogy lényegében az ott szereplő egyenletrendszert kaptuk vissza.

III. megoldás: Egy ismeretlennel is megoldhatjuk a feladatot. Az első megoldás jelöléseit használva a kis és nagymutató helyét 2 és 3 óra közt a $10+x$ és $12x$ elfordulások adják most. Ha most a kismutató van 6 és 7 közt a $12x$ helyen, akkor a nagymutató helyzetét a $12(12x-30)$ elfordulás jelzi, tehát

$$10+x=12(12x-30).$$

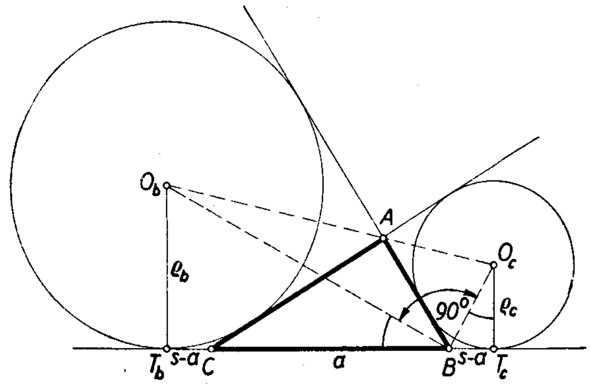
Itt tulajdonképpen nem tettünk egyebet, mint hogy okoskodás útján küszöböltük ki az első megoldás egyenletrendszerében szereplő $y(=12x-30)$ ismeretlent.

Jegyzet: Sokan választották a mutatók helyzetének meghatározására a következő utat (az elfordulásokat ismét a teljes kör 12-ed részével mérve): A 2 és 3 óra közti mutató állásánál a nagymutató 6 és 7 közt van. Ez azt jelenti, hogy a kicsi a 2-es számtól legalább $6/12$ és legfeljebb $7/12$ távolságra lehet. Ekkor 6 és 7 óra közt a nagymutató van a 12-estől számítva $2+\frac{6}{12}=\frac{30}{12}$ és $2+\frac{7}{12}=\frac{31}{12}$-del jelzett határok közt, tehát a kicsi a 6 után legalább $\frac{30}{144}$-del, de legfeljebb $\frac{31}{144}$-del kell hogy legyen. Ekkor azonban a nagymutató is ezen határok közt van 6 és 7 közt, vagyis a 12-től mérve legalább $6+\frac{30}{144}=\frac{894}{144}$ és legfeljebb $6+\frac{31}{144}=\frac{895}{144}$-nyire. Így a kismutatóról azt is tudjuk, hogy a 2-estől legalább $\frac{894}{12^3}$-nyire és legfeljebb $\frac{895}{12^3}$-nyire van. Hasonlóan szűkíthetők egyre jobban a mutatók helyzetére adható határok. Pl. $1/12^3=1/1728$-ad beosztás (vagyis 5 perc ugyanennyied része) kevesebb mint 0,2 másodperc, tehát már a kapott értékek is jó közelítést adnak. Alkalmas ez a fokozatos közelítési eljárás a pontos érték meghatározására is, azonban ennek a keresztülvitele lényeges új fogalmak tisztázásán keresztül történhetne csak, ami nem állna arányban a feladat nehézségével.

Megjegyzés: Feltűnően sok versenyző idegenkedett a pontos eredményt szolgáltató közönséges törtektől és inkább közelítő értéket szolgáltató tizedestörtekkel számolt pontatlanul.

2. feladat: *Szerkesszünk háromszöget, ha adna van az egyik oldala,* a, *és a másik két oldalhoz írt (kívülről érintő) körök ϱ_b és ϱ_c sugara.*

I. megoldás: A feladatot megoldhatjuk számítás segítségével. Jelöljük az érintőkörök középpontját O_b és O_c-vel, érintési pontjukat a BC egyenesen T_b és T_c-vel (5. ábra).



5. ábra

Ismeretes, hogy $BT_b = CT_c = s$, ahol s a háromszög kerületének felét jelenti. B-t összekötve a körközéppontokkal tudjuk, hogy BO_b és BO_c a háromszög B-nél levő belső és külső szögfelezői, és így egymásra merőlegesek. Ebből következik, hogy

$$BO_cT_c\sphericalangle = O_bBT_b\sphericalangle,$$

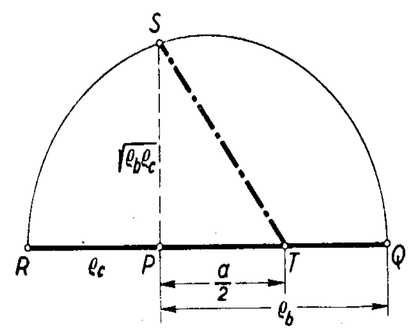
mint merőlegesszárú szögek egyenlők, következőleg BO_cT_c és O_bBT_b háromszögek hasonlók. A befogók arányát felírva

$$\frac{O_cT_c}{T_cB} = \frac{BT_b}{T_bO}, \quad \text{azaz} \quad \frac{\varrho_c}{s-a} = \frac{s}{\varrho_b}, \qquad s^2 - as - \varrho_b\varrho_c = 0.$$

Innen s-et kiszámítva (a pozitív gyököt véve)

$$s = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \varrho_b\varrho_c}.$$

Ez a távolság megszerkeszthető; a második tag pl. a következő módon: mérjük fel egy egyenesre közös P pontból ellenkező irányban a $PQ = \varrho_b$, $PR = \varrho_c$ távolságot (6. ábra).



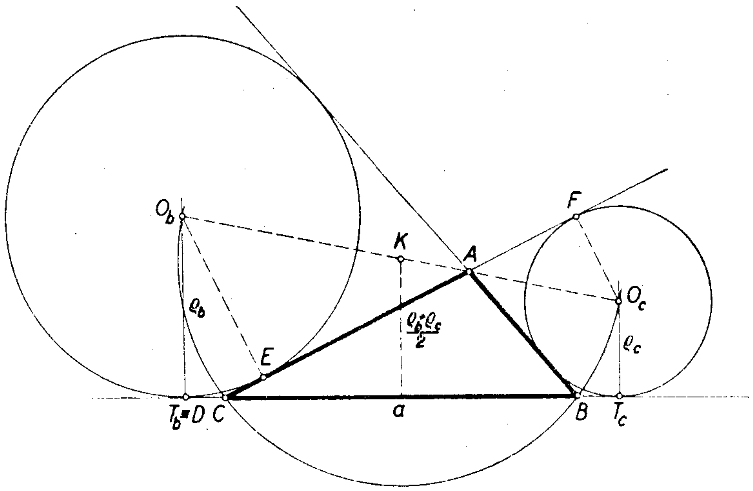
6. ábra

Az egyenesre P-ben emelt merőleges messe a QR, mint átmérő fölé emelt félkört S-ben akkor – mint ismeretes – $PS = \sqrt{\varrho_b\varrho_c}$. P-ből felmérve a QR egyenesre (bármelyik irányban) a $PT = \dfrac{a}{2}$ távolságot

$$ST = \sqrt{PT^2 + PS^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \varrho_b\varrho_c}$$

$s = BT_b = CT_c$, alapján a BC egyenesen megszerkeszthetjük a T_b és T_c, pontokat. A többi már triviális.

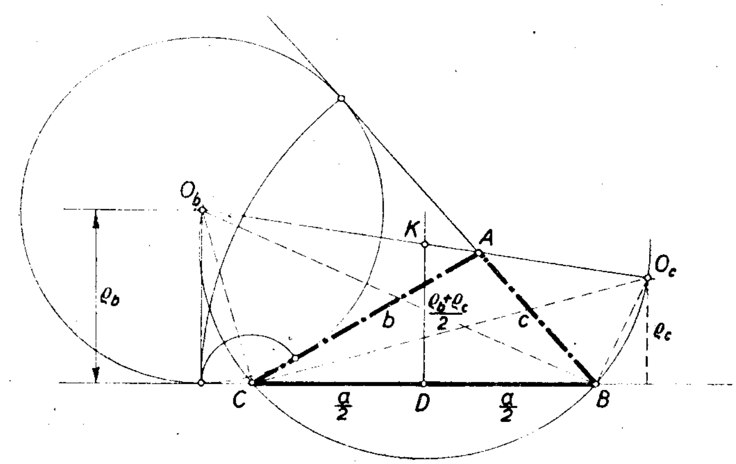
II. megoldás: Az előző megoldás jelöléseit használva, ott azt láttuk be, hogy az O_bO_c szakasz a B pontból – és természetesen ugyanúgy a C pontból is – derékszögben látszik. Ezt az előbbinél sokkal egyszerűbben is felhasználhatjuk a háromszög megszerkesztésére. A nyert összefüggés szerint az O_bO_c, mint átmérő fölé emelt félkör átmegy B-n és C-n (7. ábra).



7. ábra

A kör K középpontjából a BC egyenesre bocsátott merőleges egyrészt felezi a BC szakaszt, mint a kör húrját, másrészt hossza, mint az $O_bT_bT_cO_c$ trapéz középvonala $\dfrac{\varrho_b+\varrho_c}{2}$ hosszúságú.

Ennek alapján a szerkesztés a következőképpen történhetik: Egy a hosszúságú BC szakasz D felezőpontjában $DK=\dfrac{\varrho_b+\varrho_c}{2}$ hosszúságú merőlegest emelünk (8. ábra).



8. ábra

Megrajzoljuk a K középpontú B-n és C-n átmenő kört és ennek a KD egyenestől a C pont felé eső félkörét elmetsszük a BC egyenestől ϱ_b távolságban. Az O_b pont körüli, BC egyenest érintő kör B-ből és C-ből húzott érintője lesz a háromszög másik két oldala.

Be kell látnunk, hogy a háromszög megfelel a feltételeknek, tehát hogy c oldalához hozzáírt kör ϱ_c, sugarú. Azt mutatjuk meg, hogy e hozzáírt kör középpontja a K középponttal rajzolt kör O_b pontjával átelenes O_c, pont és ez a BC egyenestől ϱ_c távolságra van. Az előbbi következik abból, hogy O_c, a háromszög C pontban levő belső szögének és a B csúcsú külszögnek a szögfelezőin van. Ennek igazolására tekintsük az O_b középpontú ϱ_b sugarú kört. Ez szerkesztés szerint hozzáírt köre a háromszögnek, tehát O_bC felezi a C csúcsnál levő külső szöget, O_bB pedig a B-nél levő belső szöget. Így a CO_c és BO_c egyenesek, amelyek az előbbiekre merőlegesek, valóban felezik a C-nél levő belső szöget, ill. a B-nél levő külső szöget. Másrészt O_b-ből és O_c-ből merőlegest bocsátva a BC egyenesre trapézt kapunk, amelynek O_b-ből induló párhuzamos oldala ϱ_b hosszúságú, K-ból induló középvonala pedig $\dfrac{\varrho_b+\varrho_c}{2}$ hosszúságú. Így az O_c-ből induló oldal hossza valóban ϱ_c.

III. megoldás: Készítsünk vázlatot (7. ábra). A CA oldalhoz hozzáírt ϱ_b sugarú kör érintse a BC egyenest D-ben, CA-t E-ben, az AB oldalhoz hozzáírt ϱ_c sugarú kör CA-n levő érintési pontja legyen F; a háromszög kerületének felét jelöljük s-sel.

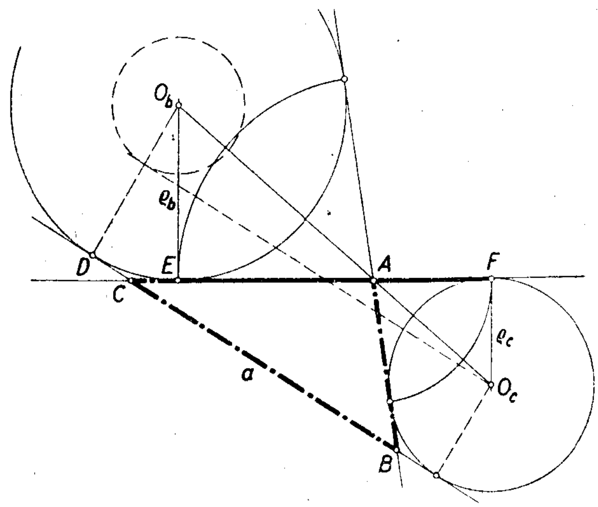
Ekkor

$$BD=CF=s, \qquad CD=CE=s-a,$$

tehát

$$EF=CF=CE=s-(s-a)=a.$$

Ennek alapján a következő szerkesztés nyerhető: $EF = a$ hosszúságú szakaszhoz rajzoljunk ellenkező oldalról E-ben érintő ϱ_b sugarú és F-ben érintő ϱ_c sugarú kört (9. ábra).



9. ábra

Szerkesszük meg a második belső közös érintőt és egy külső közös érintőt. Az érintők zárják közre a kívánt háromszöget. Jelöléseket az ábra szerint választva azt kell igazolnunk, hogy $BC = a$, ez pedig a fenti számoláshoz hasonlóan következik:

$$a = EF = CF - CE = s - CE = DB - DC = CB.$$

Megjegyzés: A helyes megoldók többsége csak bonyolult számításokkal oldotta meg a feladatot.

3. feladat:.*A sík* 20 *egyenese, melyek között párhuzamosak nincsenek, legfeljebb hány részre osztja fel a síkot? Ezek között hány síkrész véges területű?*

Megoldás: Azt fogjuk megállapítani, hogy egy újabb egyenes meghúzása mennyivel növelheti a síkrészek számát. Az első egyenes a síkot két részre osztja. Egy második egyenes, ha metszi az elsőt, mindkét síkrészből egy-egy újabb síkrészt választ le, s így két egyenes 4 részre osztja a síkot. Egy harmadik egyenes, ha metszi az első kettőt különböző pontokban, akkor három síkrészt oszt újra ketté, s így 3-mal szaporítja a síkrészek számát. Egy negyedik egyenes annyi síkrészt oszt tovább, ahány részre ezt az egyenest az előzőkkel való metszéspontjai osztják. A negyedik egyenes tehát legfeljebb 4-gyel szaporíthatja a síkrészek számát, annyival akkor, ha mindegyik egyenest metszi, de nem megy át semelyik kettő metszéspontján.

Általában ha $n-1$ egyenes van a síkban és meghúzunk egy n-ediket ezt az előzőkkel való metszéspontok részekre osztják (véges szakaszokra és a két szélső metszésponttól végtelenbe nyúló két félegyenesre). Az egyenes minden egyes része egy-egy síkrészt kettéoszt. Az n-edik egyenesnek az előzőkkel maximálisan $n-1$ metszéspontja lehet (ha nem megy át az előző egyenesek metszéspontjain), és ezek n-részre osztják az egyenest. Ha tehát 20 egyenest egymásután húzunk meg, az első két részre osztja a síkot, a továbbiak sorra $2, 3, 4, \ldots, 20$-szal szaporítják a síkrészek számát, ha nincs köztük párhuzamos és semelyik 3 egyenes nem megy át egy ponton. Így 20 egyenes

$$2 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 20 = 2 + (2 + 20) + (3 + 19) + (4 + 18) + \ldots + (10 + 12) + 11 = 2 + 9 \cdot 22 + 11 = 211$$

részre osztja a síkot.

Egymás után húzva az egyeneseket, végtelenbe nyúló síkrészek csak végtelenbe nyúló síkrészekből keletkezhetnek. Végtelenbe nyúló síkrész elvágása esetén csak akkor lesz mindkét rész végtelenbe nyúló, ha a részekre osztó egyenesnek végtelenbe nyúló része osztja ketté, mert a feltétel szerint nem lehetnek az egyenesek között párhuzamosak. Így minden egyenes 2-vel szaporítja a végtelenbe nyúló síkrészek számát. Mivel ez első egyenes is 2 végtelenbe nyúló részre osztja a síkot, így kétszer annyi a végtelenbe nyúló síkrészek száma, mint az egyeneseké. Speciálisan a 20 egyenes szolgáltatta síkrészek közül 40 lesz végtelenbe nyúló.

Jegyzet: 1. Ugyanúgy akárhány egyeneshez meghatározhatjuk, hogy mekkora a legtöbb síkrész száma, amelyre ennyi egyenessel fel lehet a síkot osztani. A síkrészek megszámlálásához azt kellett tudni, hogy a keletkező metszéspontok az egyenest hány részre osztják. Hasonló gondolatmenettel tovább is lehet menni annak meghatározására, hogy adott számú síkkal a teret hány részre lehet osztani.

2. A végtelenbe nyúló síkrészeket összeszámlálhatjuk a következőképpen is. Kerítsük körül az egyenesek összes metszéspontját pl. egy elég nagy körrel. Ez a kör a végtelenbe nyúló síkrészeken halad keresztül, mindegyikbe egy íve esik; mivel párhuzamos egyenesek nincsenek, nem eshet két ív ugyanabba a síkrészbe, így annyi síkrész nyúlik a végtelenbe, ahány részre az egyenesek a kört osztják. n egyenes esetén ezek a kört $2n$ pontban metszik és ugyanennyi ívre is osztják, tehát n egyenes esetén: $2n$, speciálisan 20 egyenes esetén: 40 a végtelenbe nyúló síkrészek száma.

Megjegyzés: Számos versenyző a feladat szövegében szereplő »egyenes« fogalmát összetévesztette a »szakasz« fogalmával. Természetesen megoldást nem találhatott.