Alábbiakban közöljük a kezdők (I. osztály) versenyén kitűzött feladatok megoldásait.

Az I. forduló feladatai:

1. feladat. *Egy motorcsónak sebessége a km/óra, egy gőzhajóé* b *km/óra. Mindkét jármű az* AB *utat teszi meg, de a motorcsónak csak akkor indul, mikor a hajó már* d *km-t meglett. Az utóbbi mégis* n *órával később érkezik* B*-be, mint az előbbi. Mekkora az* AB *távolság?*

I. megoldás. A motorcsónak az $AB = x$ km távolságot

$$\frac{x}{a}$$

óra alatt teszi meg. A motorcsónak indulásától kezdve a hajó $x-d$ km-t tesz meg B-ig; ezt b km/óra sebességgel haladva

$$\frac{x-d}{b}$$

óra alatt teszi meg. Ez n órával több, mint a motorcsónak menetideje, tehát

$$\frac{x-d}{b} = \frac{x}{a} + n.$$

Innen

$$(a-b)x = ad + abn,$$

tehát ha $a \neq b$, akkor

$$AB = x = \frac{a(bn+d)}{a-b} \text{ km.}$$

Az a, b, d, n adatok pozitív számok és a megoldásnak is csak akkor van értelme a feladat szempontjából, ha pozitív. A feladatnak tehát csak akkor van megoldása ha $a > b$ (ez nyilvánvaló is), és akkor mindig van egy megoldása.

II. megoldás. A feladatnak nyilvánvalóan csak akkor lehet megoldása, ha $a > b$. Ekkor a motorcsónak óránként $a-b$ km-t hoz be a gőzhajó előnyéből. A motorcsónak az AB úton utoléri a hajót, sőt még akkora előnyt is szerez, amennyit a hajó n óra alatt tud megtenni, vagyis bn km előnyt. A d km hátrány behozásához és a bn km előny megszerzéséhez

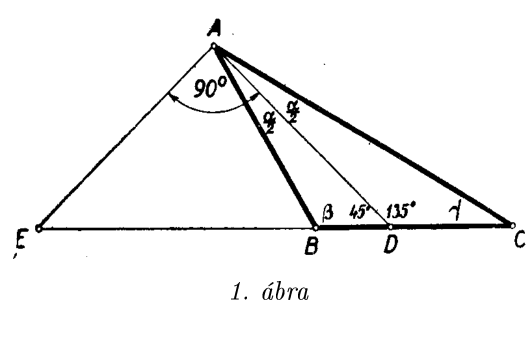
$$\frac{d+bn}{a-b} \text{ óra}$$

időre van szüksége a motorcsónaknaknak. Ennyi idő alatt teszi tehát meg az $\overline{AB}$ utat, s így a megtett út hossza

$$AB = a\frac{bn+d}{a-b} \text{ km}$$

2. feladat. *Az* $ABC_\triangle$ A *csúcsából kiinduló belső szögfelező messe a* BC = a *oldalt egy* D *pontban, a külső szögfelező pedig ugyanennek az oldatnak meghosszabbítását egy* E *pontban. Milyen összefüggés van az* ABC *háromszög szögei között, ha* AD = AE?

Megoldás: A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Mivel a feltétel szerint az $ADE_\triangle$ egyenlő szárú, a belső és külső szögfelező pedig egymással merőleges azért

$$ADB\sphericalangle = 45°,$$

és így

$$ADC\sphericalangle = 135°.$$

Az ADC, ill ADB háromszögekre a külső és belső szögek közötti összefüggést felhasználva

$$\gamma+\frac{\alpha}{2}=45^\circ, \tag{1}$$

$$\gamma+\frac{\beta}{2}=135^\circ. \tag{2}$$

(1) és (2)-ből következik, hogy

$$\beta=135^\circ-\frac{\alpha}{2}=135^\circ-(45^\circ-\gamma)=90+\gamma,$$

és így

$$\alpha=180^\circ-(\beta+\gamma)=180^\circ-(90^\circ+2\gamma)=90^\circ-2\gamma.$$

Tehát a háromszög szögeire fennáll,

$$\gamma<45^\circ,\qquad \beta=90^\circ+\gamma,\qquad \alpha=90^\circ-2\gamma. \tag{3}$$

Fordítva, ha a (3) alatti összefüggések teljesülnek, akkor α, β γ mind pozitívok, és összegük 180°, és így szerkeszthető (pl. kiindulva egy tetszőleges 45°-nál kisebb γ szögből) olyan háromszög, amelynek ezek a szögei. Ebben a háromszögben teljesülnek az (1) a (2) alatti egyenlőségek, vagyis az $ABC_\triangle$ α szögének AD felezője a DB iránnyal

$$\frac{\alpha}{2}+\gamma=45^\circ$$

nagyságú szöget zár be. Ha AE az α szög külső szögének a felezője akkor $EAD\sphericalangle=90^\circ$, és így $AED\sphericalangle-45^\circ$, vagyis $ADE_\triangle$ egyenlő szárú azaz

$$AD=AE.$$

Tehát a (3) alatti összefüggések teljesen jellemzik a feladat követelményeinek megfelelő háromszögeket.

3. feladat. *Két szám negyedik hatványúnak különbsége mikor osztható 5-tel?*

I. megoldás: Öttel való oszthatóság eldöntésére elegendő egy szám utolsó jegyét nézni. Hatvány utolsó jegye viszont csak az alap utolsó jegyétől függ, így egyszerű számítással adódik, hogy a negyedik hatvány utolsó jegye, ha az alap utolsó jegye

$$0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7,\,8,\,9$$

sorra

$$0,\,1,\,6,\,1,\,6,\,5,\,6,\,1,\,6,\,1$$

lesz. Két negyedik hatvány különbsége tehát 0-ra vagy 5-re végződik, s így osztható 5-tel, kivéve azt az esetet, ha az egyik hatványozott szám osztható öttel, a másik pedig nem.

II. megoldás. Annak eldöntésére, hogy egy különbség osztható-e 5-tel, elég ezt a maradékot nézni, amely adódik, ha a kisebbítendőt, ill. kivonandót 5-tel osztjuk.

Szükségünk lesz ennek megvizsgálásához arra az észrevételre, hogy egy szám négyzete 5-tel osztva ugyanazt a maradékot adja, mint az 5-tel való osztásból származó maradékának a négyzete. Valóban, ha

$$a=5k+r,$$

akkor

$$a^2=25k^2+10kr+r^2=5(5k^2+2kr)+r^2,$$

s így a^2-nek 5-tel osztva ugyanannyi a maradéka, mint r^2-nek.

Legyen most már a és b két egész szám.

Ekkor

$$a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2).$$

Ha a két szám ugyanannyi maradékot ad 5-tel osztva, akkor az első tényező osztható 5-tel. (Beleértjük azt az esétet is, ha mind a két szám osztható 5-tel, azaz ha mindkét maradék 0.) Ha a két szám maradéka 1 és 4, vagy 2 és 3, akkora második tényező osztható 5-tel.

Maradnak még azok az esetek, amelyekben a két szám maradéka 1 és 2, 1 és 3, 4 és 2, 4 és 3, mert ha az egyik szám 0 maradékot ad, a másik pedig 0-tól különböző maradékot 5-tel osztva, akkor a negyedik hatványok különbsége nyitván nem osztható 5-tel. Az 1 és 4 maradékot adó számok négyzete 1-et, a 2 és 3 maradékot adó számok négyzete pedig, 5-tel osztva, 4-et, ad maradékul, s így a hátralevő négy esetben a fenti szorzat harmadik tényezője osztható 5-tel.

Azt nyertük tehát, hogy két szám negyedik hatványának különbsége csak akkor nem osztható 5-tel, ha az egyik szám osztható 5-tel a másik nem, *Jegyzet:* Válasszuk b-t 1-nek, ekkor eredményünk azt adja, hogy

$$a^4 - 1$$

mindig osztható 5-tel, ha a nem osztható 5-tel. Ez speciális esete Fermat következő nevezetes tételének:*[1]

Ha p *prímszám,* a *pedig bármilyen* p*-vel nem osztható szám, akkor*

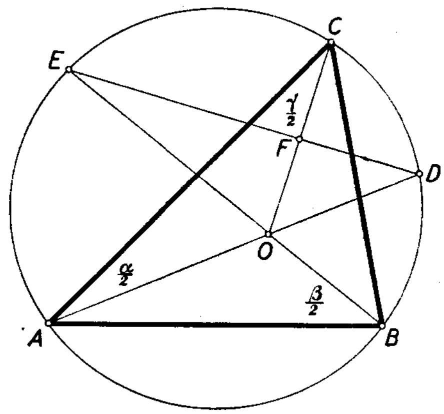
$$a^{p-1} - 1$$

osztható p*-vel.*

A II. forduló feladatai:

1. feladat. *Egy háromszög α és β szögének szögfelezője messe a háromszög köré irható kört a* D *és* E *pontban. Mekkora szögeket zár be a* DE *szakasz a háromszög γ szögének szögfelezőjével?*

I. megoldás. Legyen a C-ből induló szögfelező és DE metszéspontja F, a szögfelezők metszéspontja O. (2. ábra. – Felhasználjuk tehát azt a tételt, amely szerint a belső szögfelezők egy pontban metszik egymást.)



2. ábra

Ekkor, mint az $AOC_\triangle$ külső szöge

$$COD\sphericalangle \equiv FOD\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

A kerületi szögek tétele szerint

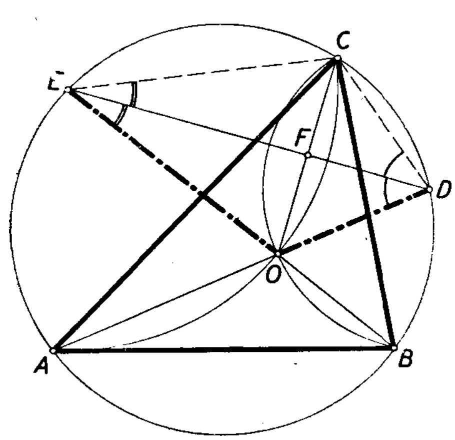
$$ADE\sphericalangle \equiv ODF\sphericalangle = \frac{\beta}{2}.$$

Így a DFO háromszögből

$$DFO\sphericalangle = 180° - (ODF\sphericalangle + FOD\sphericalangle) = 180° - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 90°.$$

DE tehát merőleges a C-ből induló szögfelezőre.

II. megoldás: A D ill. E pont felezi a körülírt körnek a BC, ill. AC oldalak fölötti ívét. Így az egyenlő íveken nyugvó kerületi szögek egyenlő volta miatt a $CDOE$ négyszögben a DE átló felezi a végpontjainál levő szögeket (3. ábra), tehát szimmetria-tengelye a négyszögnek. (A négyszög deltoid.)



3. ábra

[1]Lásd pl. Faragú László: ≫ A számelmélet elemei≪ c. szakköri füzet 75. old.

Mivel C és O egymás tükörképei DE-re nézve, azért

$$DE \perp CO,$$

de CO a C-ből induló szögfelező, mert O-n kell átmennie a harmadik szögfelezőnek is.

III. megoldás: A $CDOE$ négyszög deltoid voltát a következőképpen is bizonyíthatjuk:

Ha a B és C pontokat rögzítjük és A végigfut a $\widehat{BEC}$ íven, akkor O annak a körnek BC ívén fut végig, amelynek középpontja D (3. ábra – lásd a tavaly A. D. verseny I. forduló 1. feladatát a K. M. L. 1954 októberi számában). Hasonlóképpen A és C rögzítése és a B pont mozgása esetén O mértani helye az E középpontú AC körív. Tehát

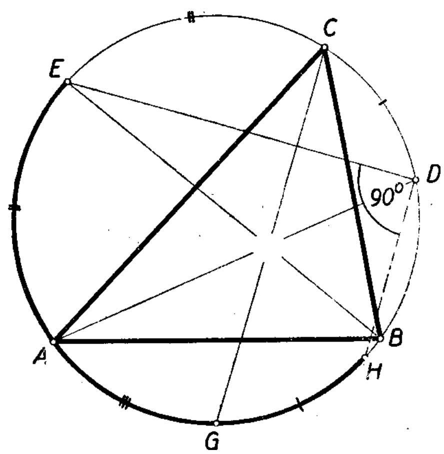
$$DC = DO \qquad \text{és} \qquad EC = EO,$$

ami bizonyítandó volt.

*

A további megoldások nem használják fel a szögfelezők metszéspontjára vonatkozó tételt.

IV. megoldás. Jelölje G a C-ből húzott szögfelező metszéspontját a körrel (4. ábra).



4. ábra

D, E és G felezik a háromszög oldalai feletti köríveket. Húzzunk D-ből párhuzamost CG-vel. Legyen ennek második metszéspontja a körrel H. Ekkor

$$\overset{\frown}{CH} = \overset{\frown}{CD},$$

így az $\widehat{EAGH}$ körív a három oldal fölötti körívnek felerészeiből tevődik össze, vagyis félkör.

Ebből következik, hogy

$$EDH\sphericalangle = 90^\circ,$$

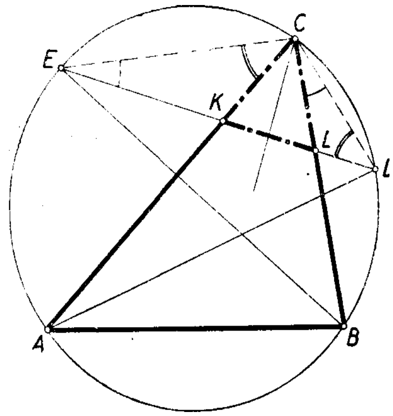
és így a $DH || CG$ összefüggés folytán

$$DE \perp CG.$$

Megjegyzés: Tulajdonképpen azt az általános tételt bizonyítottuk az itt szereplő speciális esetre, hogy két húr szöge akkora, mint a szög és csúcsszögével szemközti ívek összege fölötti kerület szögek a körben. Az itt használt bizonyítás tetszés szerinti húrokra átvihető.

A feladat néhány további megoldása lényegében e tétel más segédvonalak alapján történő bizonyításaiban állt. (Ezeket itt nem közöljük.)

V. megoldás: Messe a DE egyenes az AC és BC oldalt K-ban és L-ben. Több versenyző azt mutatta ki, hogy a CKL háromszög egyenlő szárú. Ebből következik, hogy DE merőleges a C-ből induló szögfelezőre, mert egyenlőszárú háromszögben az alap és a csúcsnál levő szög szögfelezője merőlegesek egymásra.



5. ábra

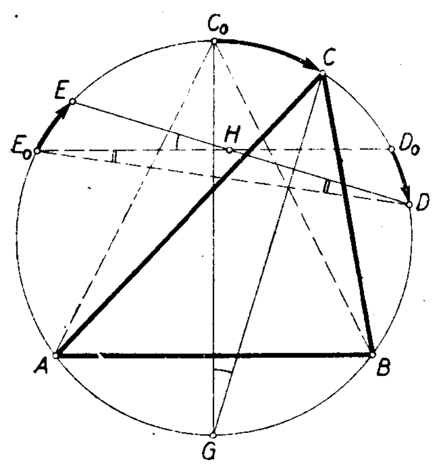
Az egyenlőszárúság például így látható be egyszerűen: Mivel E felezi az AC körívet, D a BC körívet (5. ábra), azért

$$CED\sphericalangle = BCD\sphericalangle \quad \text{és} \quad ACE\sphericalangle = CDE\sphericalangle,$$

mint egyenlő köríveken nyugvó kerületi szögek. Ebből következik, hogy a $CKE_\triangle$ és $DLC_\triangle$ harmadik szögei is egyenlők, amelyek egyben a $CKL_\triangle$ háromszög K-nál és L-nél levő külső szögei.

Így a CKL háromszög egyenlő szárú.

VI. megoldás: Legyen C_0 az AB fölötti C-t tartalmazó körív felezőpontja. Az ABC_0 egyenlőszárú háromszög C_0-ból induló szögfelezője az ábrának szimmetriatengelye s így az ABC_0 másik két szögfelezőjének, D_0 és E_0 metszéspontjait összekötő egyenes merőleges rá (6. ábra).



6. ábra

Ha most C_0 elmozdul a kör mentén C-be, akkor D_0 és E_0 ugyanolyan irányban feleakkora körívvel mozdulnak el. Legyen D_0 E_0 és DE metszéspontja H. A mondottak szerint

$$D_0E_0D\sphericalangle = EDE_0\sphericalangle = \frac{1}{2}C_0GC\sphericalangle.$$

Ennek folytán, mint az E_0DH háromszög külső szöge

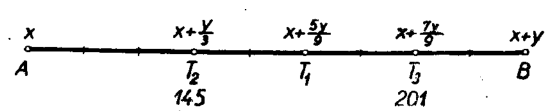
$$E_0HE\sphericalangle = HE_0D\sphericalangle + HDE_0\sphericalangle = C_0GC\sphericalangle,$$

vagyis a DE egyenes ugyanakkora szöggel fordult el, mint a C csúcsból induló szögfelező, merőlegességük tehát megmaradt.

2. feladat. *Egy műút két pontjából,* A *és* B*-ből egyszerre indul egy-egy gépkocsi egymással szembe. Sebességük állandó, aránya* $5:4$ *(az* A*-ból induló a gyorsabbik). A két gépkocsi* A *és* B *között ide-oda cirkál. Másodszor a* 145*-ös km-kőnél, harmadszor a* 201*-es km-kőnél találkoznak. Hányas km-kőnél fekszik* A *és* B*?*

I. megoldás: Nevezzük a két gépkocsit röviden a-nak és b-nek. Feküdjön A az x km-kőnél és B az $(x+y)$ km-kőnél. Jelöljük az első, második és harmadik találkozási pontot rendre T_1, T_2, T_3-mal.

Az első találkozásig a két gépkocsi együttvéve y km utat tesz meg. A feladat szerint $AT_1 : T_1B = 5:4$, amiből



7. ábra

$$AT_1 = \frac{5y}{9}\ (7.\,\text{ábra}).$$

A második találkozásig együttesen $3y$ km utat tesznek meg, tehát a megtesz $3 \cdot \frac{5y}{9} = \frac{15y}{9} = y + \frac{6y}{9} = y + \frac{2y}{3}$ km-t, és így T_1 az $x + y - \frac{2y}{3} = x + \frac{y}{3}$ km-kőnél fekszik.

A harmadik találkozásig a két gépkocsi együttvéve $5y$ utat tesz meg, amiből a-ra esik $5 \cdot \frac{5y}{9} = \frac{25y}{9} = 2y + \frac{7y}{9}$, tehát T_2-nél az $x + \frac{7y}{9}$ km-kő van. A feladat szerint

$$x + \frac{y}{3} = 145, \tag{1}$$

$$x + \frac{7y}{9} = 201, \tag{2}$$

amiből

$$y = 126 \qquad \text{és} \qquad x = 103.$$

Tehát A a 103-as, B a 103 + 126 = 229-es km-kőnél fekszik.

Célszerű az x ismeretlent egyelőre teljesen figyelmen kívül hagyni, amikor is y-ra olyan egyszerű egyenletet – tudniillik (2) és (1) különbségét – nyerünk, amely már következtetéssel pótolható, amint azt az alábbi megoldás mutatja.

II. megoldás: Az a és b jelöléseket megtartva az első találkozásig a az AB útszakasz $\frac{5}{9}$-ét, b a $\frac{4}{9}$-ét teszi meg. Minden további Két találkozás közt a két gépkocsi együtt az AB szakasz kétszeresét teszi meg, tehát a az útszakasz $\frac{10}{9}$-ét, b a $\frac{8}{9}$-ét. Így a második találkozás az útszakasz A-tól számított $\frac{1}{3}$-án történik, a harmadik pedig az A-tól számított $\frac{7}{9}$-én. A két találkozás helyének 56 km-es távolsága tehát az AB szakasz $\frac{4}{9}$ része. A harmadik találkozástól $\frac{2}{9}$ útszakasznyira tehát a 229-es kilométerkőnél van B, A pedig az útszakasz $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$-ével azaz 42 km-rel a második találkozás helye előtt, tehát a 103-as kilométerkőnél.

3. feladat. *Igazoljuk, hogy ha* n *természetes szám, akkor* $2^n - 1$, $2^n + 1$, $2^{2n} + 1$ *számok egyike osztható* 5*-tel.*

I. megoldás: Figyeijük meg, hogy páros számot 6-tal szorozva az utolsó számjegy változatlan marad, két egész szám szorzatának utolsó jegyét pedig a tényezők utolsó számjegyei szorzatának az utolsó jegye adja. Így mivel 2^4 utolsó jegye 6, tehát 2^5,2^9, általában tetszés szerinti pozitív egész k-ra 2^{4k+1} ugyanarra a jegyre végződik mint az első hatvány, vagyis 2-re, hasonlóan 2^{4p+2} utolsó jegye 4, 2^{4k+3}-é 8, végül 2^{4k}-é 6.

Így $2^n + 1$ akkor és csakis akkor végződik 5-re, ha az n kitevő $4k + 2$ alakú, $2^n - 1$ akkor és csakis akkor, ha $4k$ alakú a kitevő $2n$ aszerint $4k + 2$ alakú, vagy $4k$ alakú, amint n páratlan, vagy páros. Így $2^{2n} + 1$ az első esetben 5-re, a másodikban 7-re végződik. Azt kaptuk tehát, hogy ha a természetes szám, akkor a

$$2^n - 1, \quad 2^n + 1, \quad \text{és} \quad 2^{2n} + 1$$

számok közül az egyik és csakis az egyik osztható mindig 5-tel.

II. megoldás. $2^n - 1$ és $2^n + 1$ szomszédos páratlan számok, tehát utolsó jegyeik 1 és 3 vagy 3 és 5, vagy 5 és 7, vagy 7 és 9 vagy 9 és 1 lehet. A második és harmadik esetben a feladat állításának helyessége nyilvánvaló. Az ötödik nem fordulhat elő, mert ekkor

$$(2^n - 1) + (2^n + 1) = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

10-zel, tehát 5-tel is osztható volna, ami lehetetlen. A fennmaradó első és negyedik esetben az utolsó jegyek szorzata egyformán 3-ra végződik, tehát $(2^n - 1)(2^n + 1) = 2^{2n} - 1$ utolsó jegye 3, s így $(2^{2n} + 1)$-é 5, tehát ez osztható 5-tel.

III. megoldás: Elég megmutatni, hogy a feladatban szereplő három szám szorzata osztható 5-tel, mert 5 prímszám, és prímszámoknak megvan az a tulajdonságuk, hagy egész számok egy szorzatának csak úgy lehetnek az osztói, ha osztói valamelyik tényezönek.[2]

[2] A primszáwoknak ez a nevezetes tulajdonsága semmiképpen sem tekinthető magától értetődőnek. Bizonyítására lásd pl. az előző lábjegyzetben idézett műben a 22. old.

A négy szám szorzata:

$$(2^n-1)(2^n+1)(2^{2n}+1)=(2^{2n}-1)(2^{2n}+1)=2^{4n}-1=(2^4)^n-1$$

mindig osztható $2^4-1=15$-tel, tehát 5-tel is.

Az eredmény mutatja, hogy a három szám valamelyike mindig osztható 3-mal is.

Jegyzet. Ez a megoldás világosan mutatja a feladat kapcsolatát az I. forduló 3. feladatával kapcsolatban említett Fermat-féle tétellel.

IV. megoldás: Mivel

$$2^{2n}+1=2^{2n}-4+5=(2^n-2)(2^n+2)+5,$$

így ez a szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha jobboldalon szereplő szorzat osztható 5-tel. De

$$2^n-2,\ 2^n-1,\ 2^n,\ 2^n+1,\ 2^n+2$$

öt egymástitáni egész szám. Tehát közülük egy és csakis egy osztható 5-tel. A középső szám nem osztható 5-tel, tehát a másik négy közt kell 5-tel oszthatónak lennie. Ebből már következik a feladat állításának helyessége.