Az április 23-án lefolyt II. (döntő) fordulóban az alábbi három feladat volt kitűzve:

1. Bizonyítsuk be, hogy ha n tetszőleges természetes szám, akkor

$$5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$$

osztható 8-cal.

2. Határozzuk meg az

$$(x+y)^4 = 6x^2y^2 - 215,$$
$$xy(x^2+y^2) = -78$$

egyenletrendszer valós gyökeit.

3. Írjunk adott hegyesszögű háromszögbe téglalapokat, amelyeknek egyik oldala meghatározott háromszög oldalon (és további két csúcsa is a háromszög kerületén) van.

a) Határozzuk meg e téglalapok középpontjainak mértani helyét.

b) Írjunk az adott háromszögbe három olyan téglalapot, amelyeknek közös a körülírt körük.

Öt órai munka után 131 iskolából 331 dolgozatot adtak be.

A Bolyai János Matematikai Társulat által az Oktatásügyi Minisztériummal egyetértésben kiküldött Központi Bizottság május 18-án a következő jelentést fogadta el:

»A Bizottság megállapítja, hogy a verseny, mind a versenyzők teljesítményét, mind a feladatok kiválasztását tekintve, igen sikeres volt.

A beadott dolgozatok alapján további fejlődés állapítható meg a tanulók tudásában és fogalmazásában. Szövegmentes megoldás a döntőben már nem akadt, viszont a többletmunka tekintetében további haladás volt észlelhető.

Mind a három feladat bőven adott alkalmat minőségileg értékes megoldásokra és többletmunkára. Voltak versenyzők, akik éppen a legkönnyebbnek bizonyult 1. (számelméleti) feladatot nem tudták megoldani, de boldogultak a 2. (algebrai) és 3. (geometriai) feladattal. Ez utóbbi – ha a teljes, kifogástalan megoldást tekintjük – bizonyult a legnehezebbnek, de ezzel is számos versenyző megbirkózott, értékes, ötletes megoldásokat adva a feladat első illetőleg második részéhez.

Mind a három feladatot megoldotta 18 versenyző. Ezek közül a megoldások minőségével, a fogalmazás szabatosságával és értékes többletmunkával kiválik 7 tanuló.

Bártfai Pál, Szabados József, Csiszár Imre az első feladathoz 3 különböző megoldást ad, a 2. feladatra *Szabados* ad két megoldást. *Bártfai* dolgozata a 3. feladat második részére, az első résztől független, igen értékes II. megoldást tartalmaz. Hasonlóképpen értékes *Szabados* megoldása a 3*b* feladatra. *Csiszár* pedig a 3. feladat első részére ad kétfélé megoldást.

Ezek alapján a Bizottság javasolja, hogy az 1. díjat *Bártfai Pál*, a budapesti Petőfi gimnázium IV. oszt. tanulónak ítéljék oda, 2. díjban *Szabados József*, a budapesti Árpád g. III. oszt. tanulója, 3. díjban *Csiszár Imre*, a budapesti Petőfi g. III. oszt. tanulója részesüljön, míg azt a négy tanulót, akinek teljesítménye nem sokkal marad el a díjnyertesehé mögött, I. dicséretre ajánlja.

Legalább három feladat megoldásáért a Bizottság II. dicséretre ajánl 11 tanulót. Két feladat megoldásán felül lényeges többletteljesítményt nyújtott 24 versenyző, míg legalább két feladatot megoldott vagy ezzel egyenértékű teljesítményt ért el 27 tanuló. A Bizottság az előbbieket III. dicséretre, az utóbbiakat pedig IV. dicséretre javasolja«.

Az O. M. a fenti javaslat alapján a következő döntést hozta:

1. *díj* (oklevél + 1000 Ft)
   BÁRTFAI PÁL (Bp. I., Petőfi g. IV. o. t.)

2. *díj* (oklevél + 500 Ft)
   SZABADOS JÓZSEF (Bp. III., Árpád g. III. o. t.)

3. *díj* (oklevél + 500 Ft)
   CSISZÁR IMRE (Bp. I., Petőfi g. III. o. t.)

I. dicséretben és nagyobb könyvjutalomban részesült:

Beleznay Ferenc (Bp. VIII., Piarista g. IV. o. t.)
Biczó Géza (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.)
Harza Tibor (Székesfehérvár, József Attila g. III. o. t.)
Kálmán György (Szolnok, Verseghy Ferenc g. IV. o. t.)

II. dicséretet és könyvjutalmat nyert:

Almási Lajos (Bp. II, Rákóczi g. IV. o. t.), *Boros Pál* (Bp. VII., Madách g. IV. o. t.), *Kertész Ádám* (Bp. I., Toldy F. g. IV. o. t.). *Pátkai György* (Bp. IX.,) *Vértes Péter* (Bp. V., Eötvös g. IV. o. t.), *Zentai Árpád* (Bp. XVIII., Steinmetz g. III. o. t.), *Zsombok Zoltán* (Bp. IV., Könyves Kálmán g. III. o. t.).

III. dicséretben és könyvjutalomban részesült:

Bauer András (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.), *Beke Gyula* (Hatvan, Bajza g. III. o. t.), *Benkő Bálint* (Sárospatak, Rákóczi g. III. o. t.), *Dominyák Imre* (Miskolc, Földes g. IV. o. t.), *Doroszlai Pál* (Bp. I., Petőfi g. IV. o. t.), *Farkas László* (Ózd, József Attila g. III. o. t.), *Györösi Péter* (Bp. IV., Könyves Kálmán g. III. o.t.), *Jakubavics Péter* (Bp. V., Eötvös g. III. o. t.), *Jedlovszky Pál* (Bp. XIV., Petrik vegyip. techn. III. o. t.), *Jónás József* (Gyöngyös, Vak Bottyán g. IV. o. t.), *Kiss Péter* (Gyöngyös, Vak Bottyán g. IV. o. t.), *Kovács István* (Bp. IV., Piarista g. IV. o. t.), *Lackner Györgyi* (Bp. V., Bolyai textilip. techn. IV. o. t.), *Lábos Elemér* (Sátoraljaújhely, Kossuth g. IV. o. t.), *Mecseki Attila* (Bp. XV., Dózsa György g. IV. o. t.), *Neumann György* (Bp. XIII., Villamosenergiaip. techn. IV. o.t.), *Quittner Pál* (Bp. I., Petőfi g. IV. o. t.), *Rázga Tamás* (Bp. II., Rákóczi g. III. o. t.), *Szabó Endre* (Gyöngyös, Vak Bottyán g. IV. o. t.), *Tarlacz László* (Szombathely, Nagy Lajos g. IV. o. t.), *Tolnai Tibor* (Szombathely, Nagy Lajos g. IV. o. t.), *Udvari András* (Bp. VIII., Piarista g. III. o. t.), *Uray László* (Bp. VIII., Piarista g. IV. o. t.), *Ványai László,* (Sátoraljaújhely, Kossuth g. III. o. t.).

IV. dicséretben és könyvjutalamban részesült:

Beliczky Géza (Celldömölk, Gábor Áron g. IV. o. t.), *Bauer Péter* (Bp. VI., Kiilrsey Ferenc g. IV. o. t.), *Bognár Péter* (Bp. XIII., Villamosip. techn. IV. o. t.), *Bokor Gábor* (Bp. XIV., Gorkij isk. IV. o. t.), *Boschán Péter* (Bp. VIII., Széchenyi g. III. o. t.), *Deák Henrik* (Pécs, Szakérettségis tanfolyam), *Dévai Huba* (Karcag, Gábor Áron g. IV. o. t.), *Dunay András* (Bp. I., Petőfi g. IV. o. t.), *Edőcsény LászLó* (Bp. XI., József Attila g. IV. o. t.), *Fuchs Tamás* (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.), *Gerencsér Piroska* (Bp. VIII., Zrínyi Ilona lg. IV. o. t.), *Kirz János* (Bp. VIII.. Apáczai Csere g. IV. o. t.), *Kiss Sándor* (Debrecen, Ref. g. III. o. t.), *Krakóczki Ferenc* (Gyöngyös, Vak Bottyán g. IV. o. t.), *Krem Alajos* (Bp. VIII., Bánki Donát gépip. techn. III. o. t.). *Komjátszegi Lajos* (Szeged, Irinyi vegyip. techn. IV. o. t.), *Makai Imre* (Csongrád, Bacsányi g. IV. o. t.). *0rlik Péter* (Bp. V., Eötvös g. III. o. t.), *Peták Kálmán* (Ózd. József Attila g. IV. o. t.), *Polgár Előd* (Bp. VIII., Széchenyi g. III. o. t), *Rédly Dénes* (Pannonhalna, Bencés g. IV. o. t.), *Roboz Ágnes* (Bp. VI., Varga, Katalin IV. o. t.), *Szepesszentgyörgyi Oszkár* (Sátoraljaújhely, Kossuth g. IV. o. t.). *Takács Gyula* (Bp. VIII., Piarista g. IV. o. t.), *Válas György* (Bp. XIV., Gorkij isk. III. o. t.), *Vértes György* (Bp. XIV., Petrik vegyip. techn. IV. o. t.), *Zárody Albin* (Győr, Gépip. techn. III. o. t.).

*

Bár hivatalosan semmiféle pontozás nincs, szerkesztőségünk célszerűnek tartja a teljesítmények összehasonlítására a helyezéseket – mint az az előbbi években is történt – pontozni. Ilyen módon ez idén $7+6+5+4\cdot4+11\cdot3+24\cdot2+27\cdot1=142$ pont került szétosztásra. A verseny végeredményét megyék és iskolafajuk szerint a 4. oldalon közölt táblázat mutatja.

Lapunk feladatmegoldói ez idén még az előbbi évek kítünő eredményeit is felülmúlták, amennyiben a döntőben részt vett 331 tanuló közül 146 (44,1%) volt lapunk munkatársa; a 69 helyezett közül azonban már 62 (89,91%) lapunk feladatmegoldója, akik összesen 133 pontot, azaz az összes pontok 93%-át érték el. (Részletes beszámoló – sokféle szempontból – a »Köznevelés« július 1-i számában a 314–315. oldalon jelent meg.)

Kimutatás az 1955. évi Rákosi Mátyás Matematikai verseny II. fordulójáról megyék és iskolafajok szerint

Megyék és Budapest	Beadott dolgozatok száma						Eredmény									
	gimn.		ip. t.		összesen		Díj			Dicséret				Pontszám (nem hivatalos)		
	isk.	tan.	isk.	tan.	isk.	tan.	1.	2.	I.	II.	III.	IV.	V.	g.	ip.t.	össz.
1. Baranya	2*	6	*2*	6	*4*	12	–	–	–	–	–	–	1*	1*	–	1*
2. Bács–Kiskun	*5*	10	*1*	1	*6*	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3. Békés	*4*	6	–	–	*4*	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
4. Borsod	*7*	19	*2*	5	*9*	24	–	–	–	–	–	5	2	12	–	12
5. Csongrád	*5*	6	*1*	5	*6*	11	–	–	–	–	–	–	2	1	1	2
6. Fejér	*1*	4	*2*	3	*3*	7	–	–	–	1	–	–	–	4	–	4
7. Győr–Sopron	–	8	*1*	1	*5*	9	–	–	–	–	–	–	2	1	1	2
8. Hajdú–Bihar	*5*	10	*1*	2	*6*	12	–	–	–	–	–	–	1	1	–	1
9. Heves	*3*	8	*1*	1	*4*	9	–	–	–	–	–	4	1	9	–	9
10. Komárom	*4*	10	*1*	1	*5*	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
11. Nógrád	*1*	1	*1*	3	*2*	*4*	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
12. Pest	*5*	6	*1*	2	*6*	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
13. Somogy	*2*	3	–	–	*2*	3	–	–	–	–	1	–	–	3	–	3
14. Szabolcs–Szatmár	*2*	2	*1*	1	*3*	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
15. Szolnok	*5*	6	*1*	1	*6*	7	–	–	–	1	–	–	1	5	–	5
16. Tolna	*1*	2	–	–	*1*	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
17. Vas	*5*	11	*1*	2	*6*	13	–	–	–	–	–	2	1	5	–	5
18. Veszprém	*5*	14	*1*	1	*6*	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
19. Zala	*1*	1	–	–	*1*	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Vidék	*67*	133	*18*	35	*85*	168	–	–	–	2	1	11	11	42	2	44
Budapest	*33*	122	*13*	41	*46*	163	1	1	1	2	10	13	16	89	9	98
Összesen	*100*	255	*31*	76	*131*	331	1	1	1	4	11	24	27	131	11	142

*1 szakérettségis tanf. ill. tanuló.

Alább közöljük a II. forduló feladatainak megoldását.

1. feladat

Ismeretesek a következő oszthatósági tételek:
Ha n természetes szám, akkor

(1) $$a^n - b^n \text{ osztható } (a-b)\text{-vel,}$$
(2) $$a^n + b^n \text{ osztható } (a+b)\text{-vel, ha } n \text{ páratlan.}$$

E tételeket felhasználva többféleképpen is bizonyíthatjuk feladatunk állítását.

I. megoldás: Jelöljük az adott kifejezést $F(n)$-nel,
a) Ha n páros, vagyis $n = 2k$ (ahol $k = 1, 2, 3 \ldots$), akkor írjuk $F(n)$-et a következő alakban

$$F(2k) = (5^{2k} - 1) + 2(3^{2k-1} + 1).$$

A jobboldal első tagja (1) alapján osztható $(5^2 - 1^2) = 24 = 3 \cdot 8$-cal, a második tagban a zárójeles tényező (2) alapján osztható 3+1=4-gyel, vagyis a második tag osztható $2 \cdot 4 = 8$-cal.

b) Ha n páratlan, vagyis $n = 2k + 1$ (ahol $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$), akkor $k = 0$ esetén $F(1) = 5 + 2 + 1 = 8$, minden más esetben pedig

$$F(2k+1) = 5^{2k+1} - 5 + 2 \cdot 3^{2k} + 6 = 5(5^{2k} - 1) + 6(3^{2k-1} + 1).$$

Ez esetben tehát nemcsak az első tag osztható 24-gyel, hanem a második tag is osztható $6 \cdot 4 = 24$-gyel. Tehát 1-nél nagyobb páratlan n esetén, kifejezésünk nemcsak 8-cal, hanem 24-gyel is osztható.

II. megoldás: *a)* Ha $n = 2k$ (ahol $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$), akkor $F(n)$ így is írható:

$$F(2k) = 5 \cdot 5^{2k-1} + 5 \cdot 3^{2k-1} - 3 \cdot 3^{2k-1} + 1 =$$
$$= 5(5^{2k-1} + 3^{2k-1}) - (9^k - 1).$$

A jobboldal első tagja (2) alapján osztható $5 + 3 = 8$-cal, a második tag pedig (1) alapján $9 - 1 = 8$-cal.

b) Ha $n = 2k + 1$ (ahol $k = 0, 1, 2, \ldots$), akkor

$$F(2k+1) = 5^{2k+1} + (3-1)3^{2k} + 1 = (5^{2k+1} + 3^{2k+1}) - (9^k - 1),$$

amiből az előbbi esethez teljesen hasonlóan következik, hogy $F(n)$ osztható 8-cal.

Megjegyzés: Sok versenyző a kéttagúak hatványának polinom előállítását használta fel, azonban – mint láttuk – a kevesebb előismeretet feltételező (1) és (2) alatti oszthatósági tételek is elegendők. Még ezek is mellőzhetők, ha teljes indukciót alkalmazunk.

III. megoldás: $n = 1$-re a bizonyítandó állítás igaz, mert $F(1) = 8$.
Tegyük fel, hogy $F(k)$ osztható 8-cal, akkor elegendő azt bizonyítani, hogy $F(k+1) - F(k)$ is osztható 8-cal.

$$F(k+1) - F(k) = (5^{k+1} + 2\cdot 3^k + 1) - (5^k + 2\cdot 3^{k-1} + 1) =$$
$$= 5\cdot 5^k + 6\cdot 3^{k-1} + 1 - 5^k - 2\cdot 3^{k-1} - 1 = 4(5^{k-1} + 3^{k-1}).$$

A zárójeles kifejezés, mint két páratlan szám összege, páros szám, és így $F(k+1) - F(k)$ osztható $4\cdot 2 = 8$-cal.

2. feladat

I. megoldás:

(1) $$(x+y)^4 = 6x^2y^2 - 215,$$

(2) $$xy(x^2+y^2) = -78$$

(2) így is irható:

(3) $$xy(x+y)^2 = 2x^2y^2 - 78.$$

(2) alapján $xy \neq 0$, szorozhatjuk tehát (1)-et x^2y^2-tel, (3)-at pedig emeljük négyzetre

(4) $$x^2y^2(x+y)^4 = 6x^4y^4 - 215x^2y^2,$$

(5) $$x^2y^2(x+y)^4 = (2x^2y^2 - 78)^2.$$

(4) és (5)-ből következik, hogy a két jobboldal egyenlő. Vezessük be az $x^2y^2 = z$ jelölést és vegyük észre, hogy ha x és y valósak, akkor $z > 0$.

$$6z^2 - 215z = (2z - 78)^2 = 4z^2 - 312z + 6084,$$

vagyis

(6) $$2z^2 + 97z - 6084 = 0,$$

amiből a pozitív gyök

$$z = 36.$$

Tehát

$$z = x^2y^2 = 36,$$

és mivel (2) alapján $xy < 0$, azért

(7) $$xy = -6.$$

Így (3)-ból

(8) $$(x+y)^2 = \frac{72 - 78}{-6} = 1,$$

vagyis

(9) $$x + y = \pm 1.$$

(9)-ből $y = -x \pm 1$; ezt az értéket (7)-be helyettesítve

(10) $$-x^2 + x + 6 = 0$$

ill.

(11) $$-x^2 - x + 6 = 0$$

(10)-ből $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, (11)-ből $x_3 = -3$, $x_4 = 2$, és így (7)-ből

$$y_1 = -2, \quad y_2 = 3, \qquad y_3 = 2, \quad y_4 = -3.$$

Megjegyzés: A (6) alatti egyenlethez még az alábbi módon is juthatunk.
Írjuk (1)-et a következőképpen

$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = 6x^2y^2 - 215,$$

akkor

$$x^4 + y^4 + 4xy(x^2 + y^2) = -215,$$

és így (2) figyelembevételével

$$x^4 + y^4 = -4(-78) - 215 = 312 - 215 = 97. \tag{12}$$

(2)-t négyzetre emelve

$$x^2y^2(x^4 + y^4 + 2x^2y^2) = 6084.$$

(12) figyelembevételével és x^2y^2 helyébe z-t írva a (6) egyenlethez jutunk.

II. megoldás: Legyen $(x+y)^2 = u$ és $xy = v$, akkor $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = u - 2v$, és egyenletrendszerünk így alakul

$$u^2 - 6v^2 + 215 = 0, \tag{1}$$

$$v(u - 2v) + \ 78 = uv - 2v^2 + 78 = 0. \tag{2}$$

Vegyük észre, hogy ha x és y valósak, akkor $u \geq 0$. (2) háromszorosából (1)-et kivonva

$$3uv - u^2 + 19 = 0,$$

ahonnan

$$v = \frac{u^2 - 19}{3u}. \tag{3}$$

Ezt az értékét (1)-be helyettesítve

$$u^2 - 6\frac{u^4 - 38u^2 + 361}{9u^2} + 215 = 0,$$

amiből

$$u^4 + 721u^2 - 722 = 0,$$

és innen az egyetlen pozitív gyök

$$u = 1.$$

(3)-ból

$$v = \frac{1 - 19}{3} = -6.$$

Tehát

$$x + y = \sqrt{u} = \pm 1,$$
$$xy = v = -6.$$

Tovább úgy történhetik a számítás, mint az I. megoldásban.

III. megoldás: Felhasználva az I. megoldás (12) alatti

$$x^4 + y^4 = 97,$$

valamint az előző megoldásokból az

$$x^2y^2 = 36,$$

azaz

$$x^4y^4 = 1296$$

egyenleteket, látjuk, hogy x^4 és y^4 a

$$t^2 - 97t + 1296 = 0$$

másodfokú egyenlet két gyöke; ezek pedig

$$t_1 = 81, \qquad t_2 = 16.$$

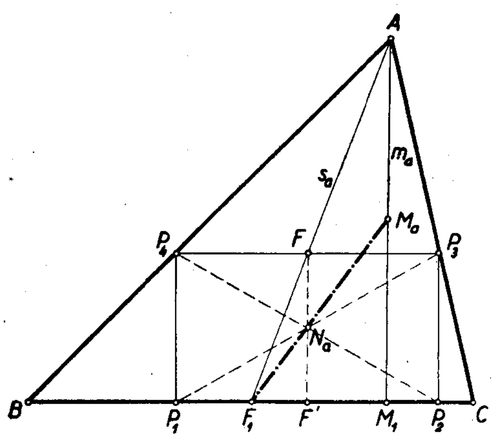
Tehát

$$x^4 = 81 \quad \text{és} \quad y^4 = 16, \quad \text{vagy fordítva} \quad x^4 = 16 \quad \text{és} \quad y^4 = 81,$$

ahonnan ($xy < 0$ figyelembevételével) az előbbi megoldásokban szereplő négy valós gyökpár adódik.

3. feladat *a)* **része**

I. megoldás: Vizsgáljuk meg az $ABC_\triangle$ $BC = a$ oldalán nyugvó beírt téglalapok középpontjainak mértani helyét. Legyen egy ilyen téglalap $P_1P_2P_3P_4$. A betűzést az 1. ábra mutatja.

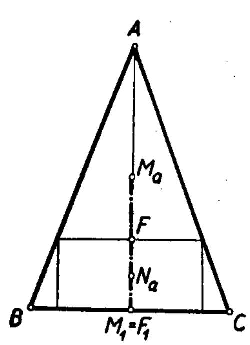


1. ábra

A P_3P_4 oldal F felezőpontja, mint ismeretes, rajta van az $AF_1 = s_a$ súlyvonalon. FF' a téglalap P_1P_2 oldalára merőleges (tehát az AM_1 magasságvonallal párhuzamos) középvonala. A téglalap N_a középpontja e középvonal felezőpontja, és így rajta van az AM_1F_1 derékszögű háromszög F_1M_a súlyvonalán, ahol M_a az $AM_1 = M_a$ magasság felezőpontja.

Megfordítva legyen N_a az F_1M_a szakasz tetszés szerinti belső pontja.Tegyük fel, hogy a háromszög nem egyenlőszárú. Húzzunk az N_a ponton át az a egyenesre merőleges egyenest, legyen ennek az a és az AF_1 egyenesek közé eső szakasza $F'F$. Ennek N_a felezőpontja, mert az AF_1M_1 háromszög F_1M_a súlyvonalán van és $F'F$ párhuzamos az ABC háromszög AM_1 magasságával. Hasonlóan látható, hogy az F pont felezi a rajta át a-val párhuzamosan húzott egyenesnek az AC és AB vonalak közé eső P_3P_4 szakaszát. A végpontokból az a egyenesre P_3P_2 és P_4P_1 merőlegeseket bocsátva tehát olyat téglalapot kapunk, amelynek N_a a középpontja és amely az ABC háromszögbe van írva a kívánt módon. Több ilyen téglalap nem lehetséges, mert ha a P_3P_4 oldalt közelítjük az a oldalhoz, illetőleg távolítjuk attól, akkor a középpont is közeledik, illetőleg távolodik, tehát különbözni fog Na-tól.

Ha az ABC háromszög egyenlőszárú ($AB = AC$), akkor a szimmetria alapján könnyen látható (2. ábra), hogy a téglalapok középpontjai az M_1M_a szakaszra esnek, másrészt ennek bármely N_a belsőpontjára tükrözve az $M_1(= F_1)$ pontot, az F tükörképen át a-val párhuzamosan húzott egyenesnek a szárakkal való metszéspontjaiból az a oldalra bocsátott merőlegesek ismét egy kívánt tulajdonságú téglalapot adnak.

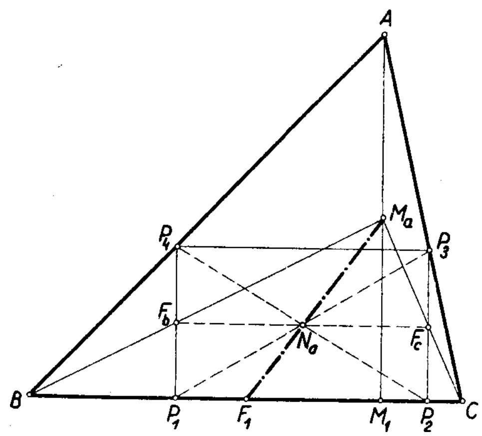


2. ábra

Az F_1 és M_a végpontokhoz tartozó téglalapok az a oldallá, illetőleg az M_a magasságvonallá fajulnak.

A keresett mértani hely tehát az F_1M_a szakasz.

II. megoldás: A téglalap középpontja felfogható a másik, P_1P_2-vel párhuzamos, F_bF_c középvonal felezőpontjaként is (3. ábra).



3. ábra

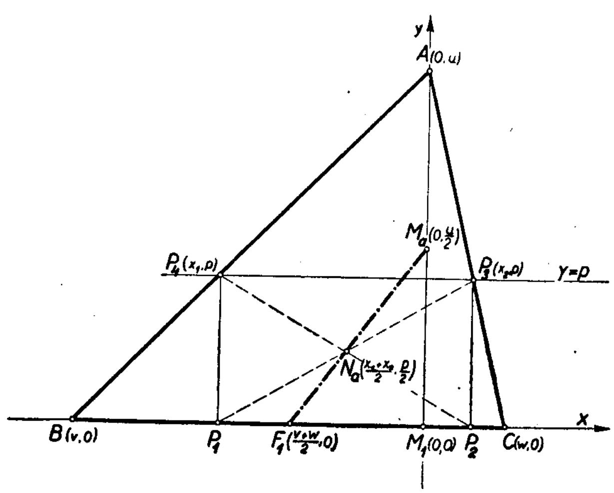
Nyilvánvaló, hogy F_b, mint P_1P_4 felezőpontja rajta van az AM_1B derékszögű háromszög BM_a súlyvonalán, F_c pedig az AM_1C háromszög CM_a súlyvonalán. Így az F_bF_c középvonal N_a felezöpontja rajta van a $BM_aC_\triangle$-nek M_aF_1 súlyvonalán.

Ismét könnyen látható a gondolatmenet megfordításával, hogy az F_1M_a szakasz minden pontjához tartozik pontosan egy kívánt elhelyezkedésű téglalap, amelynek a kiszemelt pont a középpontja.

*

Mint a fenti két megoldásból látható, a keresett mértani hely teljesen elemi úton, minden koordináta–geometria nélkül meghatározható. Minthogy igen sok versenyző használt koordináta–geometriát, mégpedig legtöbbnyire igen ügyetlenül, és gyakran még a helyes eredménynek sem tudott geometriai értelmet adni, azért itt közlünk egy egyszerű megoldást koordináta–geometriában.

III. megoldás: Helyezzük el hegyesszögű háromszögünket a derékszögű koordinátarendszerben úgy, hogy a BC oldal az x tengelyre, az A csúcspont a pozitív tengelyre kerüljön. A betűzést a 4. ábra mutatja.



4. ábra

Legyen a P_3P_4 téglalapoldal egyenlete $y = p$, a P_4 pont koordinátái $(x_1,\, p)$ és P_3 ponté $(x_2,\, p)$ akkor N_a, a téglalap középpontjának koordinátái $x_a = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_a = \dfrac{p}{2}$.

Az AB egyenes egyenlete

$$(1) \qquad y = -\frac{u}{v}x + u, \qquad \text{azaz} \qquad ux + vy = uv,$$

Az AC egyenes egyenlete

$$(2) \qquad y=-\frac{u}{w}x+u, \qquad \text{azaz} \qquad ux+wy=uw,$$

y helyébe a P_3 illetőleg P_4 pont p ordinátáját írva, (1)-ből, illetőleg (2)-ből x értékül x_1-et, illetőleg x_2-t kell kapnunk, tehát

$$ux_1+vp=uv \qquad \text{és} \qquad ux_2+wp=uw.$$

A kettőt összeadva

$$u(x_1+x_2)+(v+w)p=u(v+w)$$

Mivel x_1+x_2 és p az N_a pont x_a és y_a koordinátáinak kétszeresei, így azt kaptuk, hogy e koordinátákra

$$(3) \qquad 2ux_a+2(v+w)y_a=u(v+w),$$

vagyis (explicit alakra térve át) N_a koordinátái kielégítik az

$$y=-\frac{u}{v+w}\left(x-\frac{v+w}{2}\right)$$

egyenletet, feltéve, hogy $v+w\neq 0$.

Ez az egyenes átmegy a $\left(\frac{v+w}{2}, 0\right)$ ponton, vagyis a BC oldal F_1 felezőpontján, és iránytangense $-\frac{u}{v+w}=-\frac{u}{2}:\frac{v+w}{2}$, de ez nem más, mint F_1-ből a $\left(0, \frac{u}{2}\right)$ pontba, a magasságvonal M_a felezőpontjába vivő egyenes iránytangense.

Az N_a pont tehát ezen az egyenesen mozog, és mivel p pozitív és u-nál kisebb, így y_a pozitiv és $\frac{u}{2}$-nél kisebb, x_a pedig $\frac{v+w}{2}$ és 0 között változik, mert y_a két szélső érlékéhez $x_a=\frac{v+w}{2}$ (ha $y_a=0$), illetőleg $x_a=0$ $\left(\text{mikor } y_a=\frac{u}{2}\right)$ értékek tartoznak.

A keresett mértani hely tehát az F_1M_a szakasz.

Ha $v+w=0$, vagyis egyenlőszárú a háromszög, akkor (3)-ból

$$x_a=0,$$

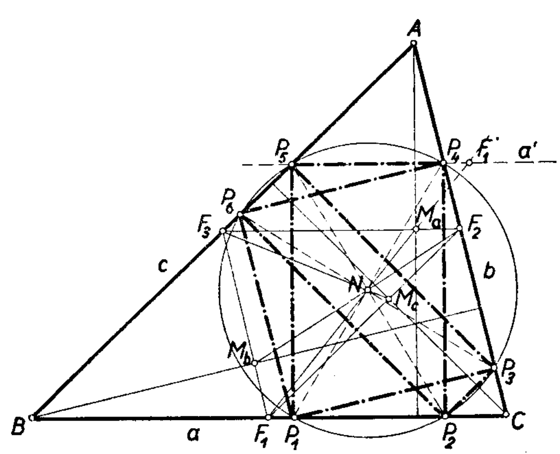
továbbá most is $0<y_a<\frac{u}{2}$. A mértani hely tehát most is az $F_1M_a(=M_1M_a)$ szakasz.

Megjegyzés: Ha megengedjük, hogy a beírt téglalapok csúcspontjai a háromszögoldalak meghosszabbításán is lehetnek, akkor a háromszög tompaszögű is lehet, és a mértani hely a teljes F_1M_a egyenes.

3. feladat ***b)*** **része**

I. megoldás: A téglalap köré írt kör középpontja a téglalap középpontja, a téglalap átlója pedig átmérője a körnek. Így a keresett téglalapok középpontjának közösnek kell lennie, átlóiknak pedig egyenlőknek – ha vannak egyáltalán ilyen téglalapok.

Két téglalap közös középpontja a feladat *a)* része szerint csak két háromszögoldalhoz meghatározott mértani helyek közös pontja lehet. Mivel az adott háromszög feltétel szerint hegyesszögű, a magasságvonalak M_a, M_b, és M_c felezőpontjai az oldalközéppontok alkotta $F_1F_2F_3$ háromszög oldalainak belső pontjai (5. ábra), az F_1M_a és F_2M_b szakaszok tehát e háromszög transzverzálisai, s így metszik egymást egy N pontban.



5. ábra

5. ábra

Legyen az ABC háromszögbe írt N középpontú és a oldalon nyugvó téglalap $P_1P_2P_4P_5$. Tudjuk, hogy van ilyen téglalap és csak egy.

A P_1 és P_4 pontok, mint átlóvégpontok, egymás tükörképei az N pontra vonatkozóan. Mivel pedig a b egyenesnek csak egy olyan pontja van, amelynek N-re vonatkozó tükörképe a BC egyenesen van, így P_4 ez a pont.

Az N pont rajta van az F_2M_b egyenesen is, tehát írható az ABC háromszögbe olyan N középpontú téglalap is, amelyik a b oldalon nyugszik. Ennek egyik b-n levő csúcsával átellenes csúcs az a oldalon lesz és ezek egymás tükörképei az N pontra nézve, így az előző megjegyzés szerint e csúcspárt csak a P_4 és P_1 pontok adhatják. Legyen a kérdéses b oldalon nyugvó beírt téglalap $P_3P_4P_6P_1$. Ekkor a $P_3P_6 = P_1P_4$, mint a téglalap átlói, továbbá $P_1P_4 = P_2P_5$, mint a $P_1P_2P_4P_5$ téglalap átlói. Mindhárom átlót felezi az N pont.

Ekkor a $P_5P_6P_2P_3$ négyszög átlói is felezik egymást és egyenlők, tehát a négyszög téglalap; az ABC háromszögbe írt olyan téglalap, amelynek N a középpontja és egyik oldala az $AB = c$ háromszögoldalon van. A három téglalap középpontja közös, átlóik egyenlők, tehát körülírt körük közös.

A feladat *a)* része I. megoldásának második felét is figyelembe véve, a fenti gondolatmenet módot ad a téglalapok megszerkesztésére is (5. ábra). Ilyen téglalap–hármas csak egy lehet, mert az N pont egyértelműen meg van határozva, ennek helyzete pedig egyértelműen meghatározza a téglalapokat.

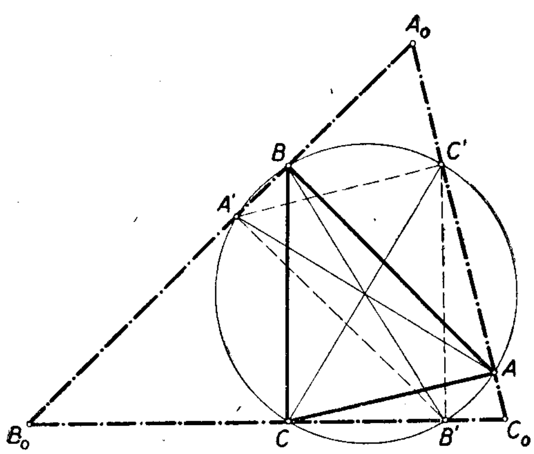
Mivel N középpontja mindhárom téglalapnak, eredményünkből az is következik, hogy az F_1M_a, F_2M_b, F_3M_c mértani helyek egy ponton mennek keresztül.

II. megoldás: A mértani helyek felhasználása nélkül is megoldható feladatunk. Ha a $P_1P_3P_{5\triangle}$-et tekintjük (5. ábra), akkor látjuk, hogy a P_1-nél levő szög, mint merőleges szárú szög, egyenlő az $ABC_\triangle$-nek C-nél fekvő γ szögével. Ugyanezen oknál fogva a $P_1P_3P_5\sphericalangle = \alpha$, és $P_3P_5P_1\sphericalangle = \beta$, és így

$$P_3P_5P_{1\triangle} \sim ABC_\triangle.$$

A $P_6P_2P_4$ háromszög a $P_3P_5P_1$ háromszögnek a köréjük írt kör középpontjára vonatkozó tükörképe. Ezt a megfigyelést felhasználva a következőképpen szerkeszthetünk a keresett ábrához hasonlót (amit azután alkalmasan elforgatva és kicsinyítve már könnyen megszerkeszthetjük a keresett téglalapokat).

Rajzoljunk az $ABC_\triangle$ köré kört; ebben a csúcsokkal átellenes pontok legyenek A', B', C' (6. ábra).

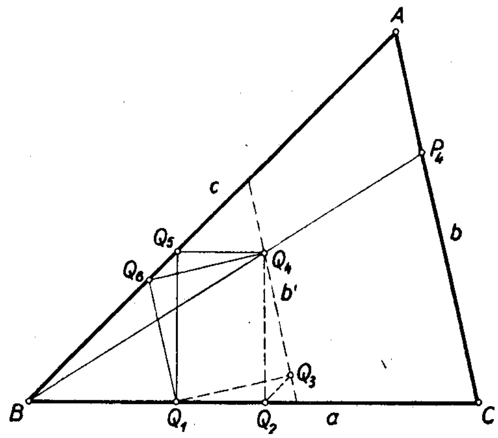


6. ábra

Az AC', BA', CB' egyenesek alkotta $A_0B_0C_{0\triangle}$ oldalai merőlegesek az $ABC_\triangle$ megfelelő oldalaira, s így a két háromszög hasonló. $ABA'B'$, $BCB'C'$ és $CAC'A'$ az előbbi háromszögbe beírt téglalapok, mert átlóik (mint körátmérők) felezik egymást és egyenlők. Így valóban a keresett ábrához hasonlót nyertünk. (Magát a szerkesztést természetesen mindjárt az $A_0B_0C_0\triangle$ megrajzolásával kezdhetjük; a szerkesztés igazolását szolgáló segédvonalak a szerkesztéskor elhagyhatók).

III. megoldás: A P_1, P_6, P_5 és P_4 pontok ismeretében (5. ábra) a másik kettő könnyen szerkeszthető (pl. mint P_6 és P_5 tükörképe a P_1P_4 szakasz felezőpontjára). E négy pont viszont P_1 ismeretében úgy szerkeszthető, hogy belőle a-ra merőlegest állítunk, illetőleg b-vel párhuzamost húzunk. Az előbbinek c-vel való P_6 metszéspontjából párhuzamost húzunk a-val, az utóbbinak c-vel való P_6 metszőpontjából merőlegest állítunk b-re. A kettő P_4-ben metszi egymást.

Ha egy pontot sem ismerünk, akkor az a oldal tetszésszerinti Q_1 pontjából kiindulva végezzük el az éppen leírt szerkesztést, a keletkezett metszéspontok legyenek sorra Q_5, Q_6, Q_4 (7. ábra).



7. ábra

Egészítsük ki $Q_6Q_5Q_4$-et egy Q_2 csúccsal, $Q_1Q_6Q_4$-et pedig egy Q_3 csúccsal téglalappá. Q_2 nyilván a-n van, a Q_3-an és Q_4-en átmenő b' egyenes pedig párhuzamos b-vel. A keletkezett téglalapok Q_2Q_5, illetőleg Q_3Q_6 átlói egyenlők a közös Q_1Q_4 átlóval és felezik egymást annak felezőpontjában. Ebből viszont következik, hogy $Q_5Q_6Q_2Q_3$ is téglalap, mert átlói felezik egymást és egyenlő hosszúak. Az a, b' és c oldalak az adott háromszöghöz hasonló és hasonló helyzetű háromszöget alkotnak B-vel mint hasonlósági ponttal. Így a keresett ábrához hasonlót kaptunk. Q_4-et B-ből b-re vetítve nyerjük a P_4 pontot és ebből kiindulva már megszerkeszthetjük a továbbiakat. (A szerkesztés elvégzésekor Q_4 után természetesen mindjárt P_4-et szerkesztjük. A szerkesztés megtalálását és egyben mindjárt helyességének igazolását is szolgáló segédvonalak és pontok megrajzolására a szerkesztéskor nincs szükség.)

Megjegyzések: 1. A feladat *a)* részéhez fűzött megjegyzésből kitűnik, hogy ha a beírt téglalap csúcspontjaira semmi kikötést nem teszünk, akkor tompaszögű háromszög esetén is megoldható feladatunk *b)* része.

2. Derékszögű háromszög esetén (pl. ha $\gamma = 90°$) $F_1 \equiv M_b$ és $F_2 \equiv M_a$, és így $M_c \equiv N$, $P_5 \equiv P_6$, $P_2 \equiv P_3 \equiv C$. Ez esetben tehát a befogókhoz tartozó téglalapok azonosak, az átfogóhoz tartozó téglalap pedig az m_c magasságvonallá fajul.

3. Tehát *minden* háromszögnek van *egy és csakis egy* N pontja.