Az 1205. gyakorlatban[1] végzett számításhoz hasonlóan általában belátható, hogy ha az N szám prímtényezős felbontása

$$N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k},$$

ahol $p_1, p_2, \ldots, p_k$ különböző prímszámok és $a_1, a_2 \ldots, a_k$ pozitív egész számok, akkor N osztóinak összege, saját magát is közéjük értve

$$S_N = (1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{a_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \ldots + p_2^{a_2}) \cdot \ldots \cdot (1 + p_k + p_k^2 + \ldots + p_k^{a_k}).$$

A definíció szerint az N és M számok barátságos számpárt alkotnak, ha

$$S_N - N = M, \qquad S_M - M = N,$$

azaz, ha

$$S_N = S_M = N + M. \tag{3}$$

Az (1) számpár esetében $S_A = S_B$ mindenesetre teljesül, hacsak p_1 és p_2 a 7, 71, 17, 31-től különböző prímek, hiszen A és B első két-két tényezője azonos, ennélfogva ugyanez áll S_A és S_B első két-két tényezőjére, a további kettőre pedig

$$(1 + 7)(1 + 71) = (1 + 17)(1 + 31) = 576 = 2^6 \cdot 3^2.$$

Eszerint olyan p_1, p_2, a számokat keresünk, amelyekre (3) szerint

$$S_A = S_B = \left(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^a\right)(1 + p_2) \cdot 2^6 \cdot 3^2 = A + B = p_1^a \cdot p_2(7 \cdot 71 + 17 \cdot 31) = p_1^a \cdot p_2 \cdot 2^{10},$$

vagyis

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^a)(1 + p_2) \cdot 3^2 = p_1^a p_2 \cdot 2^4.$$

A bal oldal osztható 3^2-nel, ez a jobb oldal felbontása miatt csak $p_1 = 3$ és $a \geqq 2$ mellett teljesül, amennyiben még a

$$p_2 = \frac{3^2(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^a)}{2^4 \cdot 3^a - 3^2(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^a)} = \frac{1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^a}{2^4 \cdot 3^{a-2} - (1 + 3 + \ldots + 3^a)} \tag{4}$$

kifejezés törzsszámot ad. Ennek értéke $a = 2$ esetén nem egész szám, $a = 3$ esetén 5, tehát az

$$A = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 71 = 67\ 095 \qquad \text{és} \qquad B = 3^3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 31 = 71\ 145$$

számok kívánt alakú barátságos számpárt alkotnak.

A (2) pár esetében hasonlóan olyan p_3, p_4, p_5 prímeket kell keresnünk, amelyekre $S_C = S_D$ alapján, közös tényezőiket mindjárt elhagyva

$$(1 + 79)(1 + p_3) = (1 + p_4)(1 + p_5), \tag{5}$$

továbbá az $S_C = C + D$ feltételből:

$$\left(1 + 3 + 3^2\right)(1 + 5)(1 + 13)(1 + 79)(1 + p_3) = 3^2 \cdot 5 \cdot 13(79p_3 + p_4p_5),$$

azaz

$$2^6 \cdot 7(1 + p_3) = 3(79p_3 + p_4p_5), \tag{6}$$

végül, amelyek 3-tól, 5-től, 13-tól és 79-től különbözők (nem lehet pl. $p_4 = 79$ sem, különben $C = D$, nem számpárt kapnánk).

p_3 értékét megválasztva keresünk a (6)-ból adódó

$$p_4p_5 = \frac{448 + 221p_3}{3} = 149 + 70p_3 + \frac{1 + p_3}{3} \tag{7}$$

kifejezésre olyan értéket, amely olyan két megengedett törzsszám szorzatára bontható, amelyekkel (5) is teljesül. A harmadik tag miatt elég 2-vel és a $6k - 1$ alakú prímekkel próbálkozni. $p_3 = 2$, 11, 17 és 23 esetén a felbontásban rendre föllép az 5-ös, 13-as, 5-ös, ill. 3-as tényező, végre $p_3 = 29$ esetén (7) értéke $2189 = 11 \cdot 199$, az utóbbi tényező is prím, és $p_4 = 11$, $p_5 = 199$ esetén teljesül (5). Eszerint

$$C = 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 79 \cdot 29 = 1\ 340\ 235 \qquad \text{és}$$
$$D = 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 199 = 1\ 280\ 565$$

[1] K. M. L. 37 (1968) 218. o.

egy kívánt alakú barátságos számpár tagjai.

Terjéki József (Kiskunfélegyháza, Petőfi S. Gimn., III. o. t.)
Fischer Ágnes (Budapest, Móricz Zs. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Megmutatjuk, hogy sem az (1), sem a (2) követelményt nem elégíti ki további számpár. Az ismert

$$1+3+3^2+\ldots+3^a=\frac{3^{a+1}-1}{3-1}=\frac{27\cdot 3^{a-2}-1}{2}$$

összeg-képlet alapján (4) így alakítható tovább:

$$p_2=\frac{27\cdot 3^{a-2}-1}{(32-27)\cdot 3^{a-2}+1}=6-\frac{3\cdot 3^{a-2}+7}{5\cdot 3^{a-2}+1},$$

ezért $p_2<6$, másrészt a tört kifejezés értéke egész, számlálója nem kisebb a nevezőnél:

$$-2\cdot 3^{a-2}+6\geqq 0,\qquad a-2\leqq 1,\qquad a\leqq 3.$$

A C, D pár esetében (5)-ből és (7)-ből

$$p_4+p_5=80(1+p_3)-p_4p_5-1=\frac{29p_3-211}{3}=10p_3-70-\frac{1+p_3}{3}, \tag{8}$$

tehát p_4, p_5, az

$$u^2-du+e=0 \tag{9}$$

egyenlet gyökei, ahol $d=p_4+p_5$, $e=p_4p_5$. Legyen még $p_4<p_5$. Nem lehet $p_4=7$, mert így (6) jobb oldala csak $p_3=7=p_4$ esetén lehet egyenlő a bal oldallal, ami 7 többszöröse, ezért $p_4\geqq 11$ és (9)-ből

$$p_4=\frac{d}{2}-\sqrt{\frac{d^2}{4}-e}\geqq 11,$$

átrendezve, végül (7)-et és (8)-at felhasználva

$$121+e\geqq 11d,\quad 29\geqq p_3.$$

Eszerint fönt minden szóba jövő próbát elvégeztünk p_3-mal.

Lengyel Tamás (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)
Göndöcs Ferenc (Győr, Révai M. Gimn., I. o. t.)

2. A (4) kifejezés, a mértani sort összegezve és 2-vel bővítve így alakítható

$$p_2=\frac{3^{a+1}-1}{2^5\cdot 3^{a-2}-3^{a+1}+1}=\frac{3^{a+1}-1}{5\cdot 3^{a-2}+1}=$$

$$=\frac{5(5\cdot 3^{a-2}+1)+2\cdot 3^{a-2}-6}{5\cdot 3^{a-2}+1}=5+\frac{2\cdot 3^{a-2}-6}{5\cdot 3^{a-2}+1}.$$

Az utolsó alak szerint ez egyedül $a=3$-ra egész, mert különben a tört abszolút értéke kisebb 1-nél.