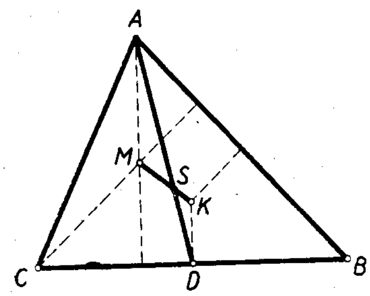
A Menelaos- és a Ceva-féle tétel[1]

1. A lineáris ponthármas osztóviszonya

Három, egy egyeneshez illeszkedő pont *konfigurációját* (vagyis azt az alakzatot, melyet ilyen három pont alkot) *lineáris ponthármasnak* nevezzük. Ez a geometriai fogalom – ha nem is a mondott nevén nevezve – előfordul a középiskolai tananyagban is. Néhány példát megemlítünk.

A háromszög bármelyik szögpontja, a vele szemközti oldal felezőpontja, a háromszög súlypontja lineáris ponthármast alkotnak, mégpedig a szóbanforgó szögponthoz tartozó súlyvonalon. Ilyen pl. az 1. ábrán az A, D, S.



1. ábra

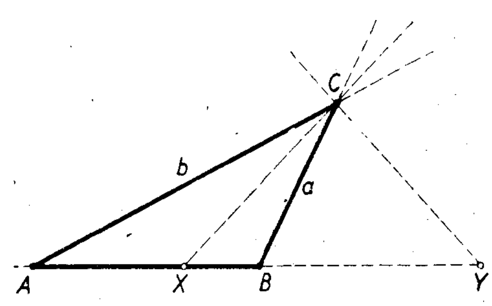
Az S pont az AD szakaszt $2:1$ arányban osztja. Ilyen továbbá a háromszög köré írt kör középpontja (K), magasságpontja (M), súlypontja (S) által alkotott ponthármas is. Ezeket a pontokat az Euler-féle egyenes köti össze, vagyis ugyancsak lineáris ponthármast alkotnak. Itt most az S pont a KM szakaszt $1:2$ arányban osztja. Az eddig mondottak mintájára a D pont BC szakaszon való helyét is kifejezhetnők úgy, hogy az a pont, mely a BC szakaszt $1:1$ arányban osztja.

A felsorolt példák mutatják a következő fogalmak és jelölések bevezetésének célszerűségét. Akkor, de csak akkor, ha A, B, X egy egyenes három különböző pontja, (ABX)-szel jelöljük az AX és XB távolság hányadosát. Az

$$(ABX) = \frac{AX}{XB}$$

távolság-hányadost az X osztópont A és B alappontokra vonatkozó osztóviszonyának nevezzük. Így – hacsak X nem az AB szakasz felezőpontja – az (ABX) és (BAX) osztóviszony két különböző szám. A definícióban adott hányados alakból tüstént láthatjuk, hogy az utóbbi az előbbinek reciprok értéke. Ezért az írás sorrendjében első és második alappontról beszélünk. Azt nem kötjük ki, hogy X az AB szakasz valódi osztópontja (belső pontja) legyen, lehet az AB szakasz B-felé, avagy A felé való meghosszabbításán is (külső pont). Éppen ezért szerencsésebb X-et – általában – viszonyított pontnak nevezni.

További meggondolásra int a következő – ugyancsak jól ismert – tétel. A háromszög bármelyik szögpontjához tartozó szögfelezők (akár belső, akár külső szögfelező) egyező osztóviszonyú pontokban metszik a szögponttal szemközti oldalt (2. ábra).



2. ábra

Az idézett tétel a bevezetett jelöléssel így fejezhető ki:

$$(ABX) = \frac{b}{a} \qquad \text{és} \qquad (ABY) = \frac{b}{a}$$

Jegyezzük meg azt a kivételes esetet, amidőn $a = b$, mert akkor

$$(ABX) = 1:1,$$

[1] Menelaos az 1. században élt, görög matematikus. G. Ceva (kiejtése: Cseva) olasz matematikus, a szóban forgó tétele 1678-ból való.

de az (ABY)-nak nincs értelme, mert a C-hez tartozó külső szögfelező BC oldalegyenessel párhuzamos, tehát Y metszéspont nem is lép fel. No már most, ha az osztóviszony felírt jelöléséből és az ahhoz tartozó értékből kívánjuk az alappontokat összekötő egyenesen a viszonyított pont helyét rekonstruálni, még azt sem tudjuk, hogy belső, vagy külső pontról van-e szó; hiszen éppen az idézett tétel felírásából láttuk, e feladat nem egyértelmű.

A most mondottak indokolják az osztóviszony értékének előjellel való ellátását. Tekintsük az AX-et és XB-t úgy, hogy A-tól X felé és X- től B felé haladva leírt utakról van szó. Az AB szakasz belsejébe eső X-re nézve ezek az utak *egyező* irányításúak, a szakasz meghosszabbítására eső X esetében *ellenkező* irányításúak. Az utóbbi esetben tekintsük az osztóviszonyt *negatív* számnak. Így a 2. ábrára vonatkozó állításunk szerencsés kifejezése:

$$(ABX) = +\frac{b}{a} \quad \text{és} \quad (ABY) = -\frac{b}{a}\,.$$

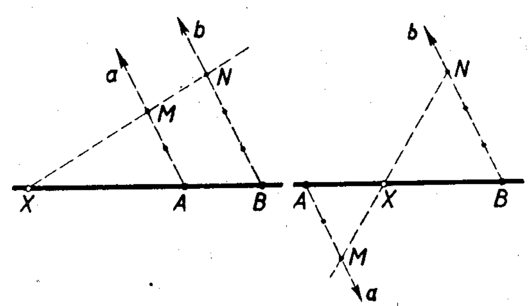
Annyiban módosítjuk tehát az (ABX) eredeti értelmezését, hogy az $AX : XB$ hányadost irányított utak hányadosának tekintjük és ezáltal az osztóviszony előjeles számot szolgáltat[2].

Az AB egyenest leíró X pont (ABX) osztóviszonya az X mozgása folyamán folytonosan változik és *egy rögzített X helyhez egy határozott* (ABX) érték tartozik[3]. Kivételt képez az A-val egybeeső és a B-vel egybeeső X pont, ahol is a három különböző pontot feltételező (ABX) értelmezése hiányzik.

Ha pedig adva van A és B, továbbá egy v szám akkor az

$$(ABX) = v$$

kirovásnak megfelelő X pont egyértelműen előállítható. A 3. ábra a $v = -2/3$ és $v = +2/3$ értéknek megfelelő eljárást mutatja be. Szóban csak annyit fűzünk hozzá, hogy a és b tetszőleges, de egymással párhuzamos segédegyenesek.



3. ábra

Mérjük fel az a és b segédegyenesekre A-tól M-ig terjedően és B-től N-ig terjedően egy tetszőlegesen választott szakasznak 2-szeresét 3-szorosát.

Az eljárás alkalmazható tetszés szerinti v érték esetén. Általában AM és BN szerepét olyan szakaszokra ruházzák át, amelyeknek a hányadosa v abszolútértéke[4]

Ez az eljárás megvilágítja azt, hogy X metszéspont nem lép fel, ha $v = -1$, mert akkor $AM = BN$, s ennélfogva MN egyenes az AB egyenessel párhuzamos. Megvilágítja azt is, hogy $v = 0$ esetén – AM-et zérussá zsugorodott hosszúságúnak tekintve – X az A-val egybeesik. (Ámde az osztóviszony fogalmát ezzel kiterjesztettük, mert eredetileg megköveteltük, hogy A, B, X különböző pontok legyenek. Nem terjeszthető ki ilyen módon a B-vel egybeeső X-re is. mert akkor a b segédegyenesre felmért osztótávolság – a BN szakasz – válik zérussá, osztó pedig nem lehet zérus.)

Foglaljuk össze az eddig tárgyaltak lényegét. – (1) Az adott A, B pontokat összekötő egyenest leíró X pont meghatározta $(ABX) = v$ számot tekintve: *Az X pont az egyenes minden helyén – kivéve* a B *pontot – egy-egy* v *számot létesít.* Könnyen belátható, hogy így *két különböző pont két különböző számot létesít.* – (2) Az adott A, B pontokat összekötő egyenest és a minden értéken egyszer végigfutó v számot tekintve: *Bármely* v *számhoz egy-egy* X *pont tartozik,* $v = -1$ kivételével; két különböző számhoz két különböző pont tartozik. (3) B *alappontot és $v = -1$ számot kivéve az $(ABX) = v$ követelmény az AB egyenes pontjai és a számok összessége között egy egyértelmű megjeleltetést létesít.*

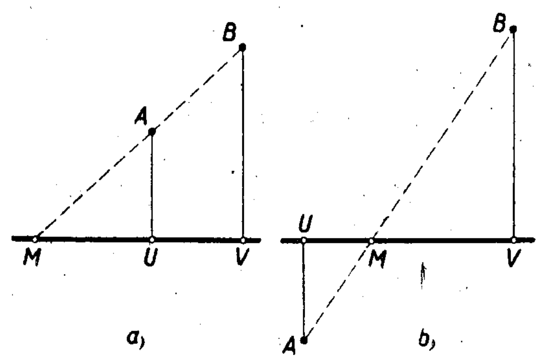
2. *A* Menelaos-féle tétel

[2] Tisztán konvenció, hogy melyik hányadost vesszük pozitív, ill. negatív előjellel. Az irodalomban gyakran találjuk az $(ABX) = \dfrac{AX}{BX} = \dfrac{XA}{XB}$ értelmezést, amikor tehát a belső pont osztóviszonya negatív, és a külsőé pozitív.

[3] Tanulságos dolog az osztóviszony értékváltozásának grafikus ábrázolása. Célszerűbb evégből AB egyenest koordinátatengelynek, AB szakaszt egységnek tekinteni. Egy X pontban a tengelyre merőlegest állítunk, arra az (ABX) értékét az AB egységszakaszhoz viszonyított nagyságban, a tengelytől fogva, előjele szerint felmérjük. Az így nyert végpontokat összekötő vonal *hiperbola.*

[4] Itt nyilvánvalóan nem az érdekel, hogy ilyen két szakaszt miként kapunk, hanem csak az $(ABX) = v$ kirovásnak megfelelő X pont egyértelműen meghatározott voltát kívánjuk beláttatni. Célszerű b segédegyenesre valamely tetszőlegesen választott egységszakaszt, a-ra pedig az adott v abszolútértékét képviselő hosszúságot felrakni, hogy azok töltsék be BN és AM szerepét. Ez a gyakorlatilag kielégítő eljárás a szó szigorú értelmében nem szerkesztés.

Az osztóviszony előjelzése indokolja, hogy egy egyenes szakaszainak, vagy párhuzamos egyenesű szakaszoknak az egymáshoz való viszonyítása helyett irányított – vagyis kezdőponttól végpontig haladó – utak hányadosát alkalmazzuk. Ilyen módon előjeles számok fognak az arányok szerepében fellépni. *Aszerint, hogy egyező, vagy ellenkező irányításúak a szakaszok, a szakaszok arányát pozitív, vagy negatív számnak tekintjük.*



4. ábra

Például (4. ábra) a következő kifejezések a helyesek:

$$4a \text{ ábrán } (ABM) = \frac{AU}{VB} = \frac{UA}{BV},$$
$$4b \text{ ábrán } (ABM) = \frac{AU}{BV} = \frac{UA}{VB}.$$

Ugyanis, ha a baloldali osztóviszony negatív, akkor a jobboldalon ellenkezően irányított, párhuzamos szakaszokat kell írnunk. Ha a baloldali osztóviszony pozitív, akkor a jobboldalon egyező irányítású, párhuzamos szakaszokat kell írnunk.

Ezzel a megállapodással az előjelzés folytán támadható logikai zavarokat elhárítottuk. A párhuzamos szelőkre vonatkozó ismert tételeinket is ebben az értelemben – módosított fogalmazásban – alkalmazzuk a továbbiakban.

Egy háromszög és egy a háromszög síkján levő egyenes – ABC és s – ha az egyenes nem megy át egyik szögponton sem, két különböző kölcsönös helyzetben lehet. A szögpontok az egyenes egyik oldalára esnek, vagy kettejük az egyik oldalára és a harmadik a másik oldalára. Eszerint, ha s az ABC mindhárom oldalegyenesét metszi, mégpedig AB, BC, CA, egyenest rendre Z, X, Y pontban, akkor az

$$(ABZ), \quad (BCX), \quad (CAY)$$

osztóviszonyok közül vagy három negatív, vagy kettő pozitív és egy negatív. Akár az előbbi, akár az utóbbi eset áll fenn, mindig az

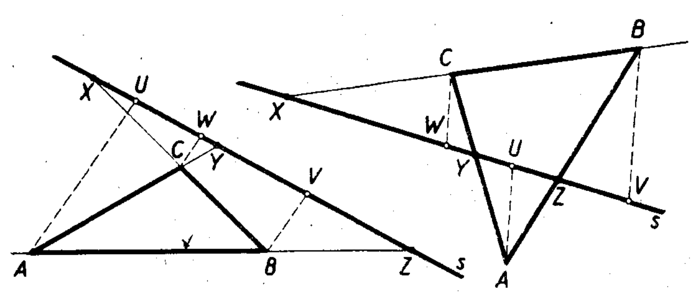
$$(ABZ) \cdot (BCX) \cdot (CAY) < 0$$

érvényes. *A* Menelaos-féle tétel ennél többet mond, nevezetesen azt, hogy e három osztóviszony szorzatának mi az értéke.

Menelaos-*féle tétel: Ha* s *egyenes nem megy át az* ABC *háromszög egyik szögpontján sem, és az* AB, BC, CA, *egyeneseket rendre* Z, X, Y *pontokban metszi, akkor*

$$(ABZ) \cdot (BCX) \cdot (CAY) = -1.$$

Az 5. ábra a két különböző helyzetviszonyt szemlélteti. Egy-egy oldalegyenes és az s egyenes egy-egy párt alkot. E három egyenespár bármelyikének két-két párhuzamos szelője lép fel az ábrán.



5. ábra

Azokra a fentebb már idézett tételt alkalmazva mind a két esetben az

$$(ABZ) = \frac{AU}{VB}, \quad (BCX) = \frac{VB}{CW}, \quad (CAY) = \frac{CW}{UA}$$

érvényes.

A három egyenlőség szorzatából éppen a bizonyítandó formula helyessége adódik. A jobboldali törtek szorzata ugyanis »−« előjelű tört, melynek számlálójában és nevezőjében ugyanaz a három irányított szakasz szerepel. Tehát a jobboldal értéke valóban -1.

A Menelaos-tétel megfordításának tekinthető tétel a következő: *ha az* ABC *háromszög szögpontjaitól különböző* Z, X, Y *pontok rendre* az AB, BC, CA *egyenesen vannak és fennáll az*

$$(ABZ) \cdot (BCX) \cdot (CAY) = -1,$$

akkor az X, Y, Z *pontok egy egyenesen vannak, vagyis* X, Y, Z *kollineáris ponthármas.*

E tétel bizonyítását úgy végezzük, hogy a tétel állítását tagadjuk, s a Menelaos-féle tételre támaszkodva megmutatjuk a tagadás tarthatatlanságát.

Tegyük hát fel, hogy a bizonyítandó tétel összes kirovásai teljesülnek, s mégsem kollineáris az X, Y, Z ponthármas. Ennélfogva XY egyenes egy a Z-től különböző P pontban metszi az AB egyenest, vagy párhuzamos vele. Ha az első feltevés áll fenn, akkor a Menelaos-féle tétel szerint

$$(ABP) \cdot (BCX) \cdot (CAY) = -1,$$

a kiinduló feltevés pedig

$$(ABZ) \cdot (BCX) \cdot (CAY) = -1$$

volt. E kettő egybevetéséből

$$(ABP) = (ABZ)$$

következik, ami képtelenség, mert különböző pontok osztóviszonya nem lehet egyenlő. Ha a másik feltevés áll fenn, vagyis XY az AB-vel párhuzamos, akkor a párhuzamos szelők tétele szerint

$$(BCX) \cdot (CAY) = +1,$$

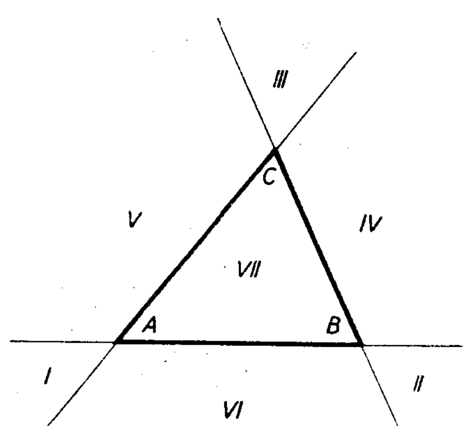
amit a kiinduló feltevéssel egybevetve $(ABZ) = -1$ adódik. Ez szintén képtelenség, mert – amint már tudjuk – $v = -1$ osztóviszonynak megfelelő pont az AB egyenesen nincs.

Ezzel a megfordított tétel indirekt bizonyítását be is fejeztük.

3. A Ceva-féle tétel

Tekintsük a sík ABC háromszögét, továbbá a csúcsoktól különböző és az oldalegyenesekhez sem illeszkedő S pontot. Két esetet különböztessünk meg: az S pont a háromszög belsejében van, vagy a háromszögön kívülre esik. Tekintsünk el ama esetektől, midőn csak egyike is bekövetkezik a következő lehetőségeknek: $AS \parallel BC$, $BS \parallel CA$, $CS \parallel AB$. Másszóval AS a BC-t, BS a CA-t, CS az AB-t messe, mégpedig rendre egy X, Y, Z pontban.

Könnyen belátható az, hogy az ABC háromszög belsejében levő S pont esetében X metszéspont a B és C pontok között, Y a C és A, Z az A és B között van. Ha azonban az S külső pont és az X, Y, Z metszéspontok mind fellépnek, az oldalegyeneseken való helyzetük megállapítása körültekintőbb meggondolást kíván (6. ábra).



6. ábra

A háromszög oldalegyenesei 7 tartományra bontják a síkot. Egy véges tartományra (VII) és még hat, végtelenbe nyúló tartományra. Az utóbbiak a külső tartományok. Alkatuk szerint két különböző típust képeznek. Az egyik típushoz az I, II, III tartományok, a másikhoz a IV, V, VI tartományok tartoznak.

Ha S pont I-ben van, akkor X a B és C között Y és Z pedig rendre a CA, és AB oldal meghosszabbításán van. Ha S pont a IV tartományban van és Y, Z metszéspontok fellépnek, akkor X és B és C között, az Y és Z pedig rendre az AC és AB oldal valamelyik meghosszabbításán van. Hasonlóan tisztázható a II, III, ill. az V, VI tartományban levő S pont esetében az X, Y, Z pontok helyzete.

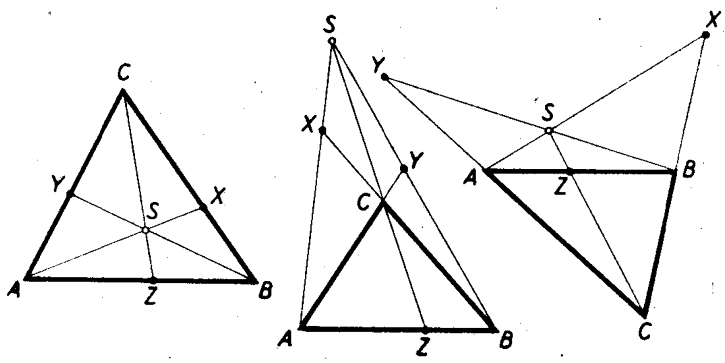
Az eddig megállapítottak alapján, ha S az ABC-hez képest belső pont, akkor (ABZ), (BCX), (CAY) osztóviszonyok mindegyike pozitív szám; ha pedig külső pont, akkor a három osztóviszony ketteje negatív és egy pozitív szám. Vagyis akár belső, akár külső pontra nézve, ha X, Y, Z metszéspontok mindegyike fellép, fennáll az

$$(ABZ)\cdot(BCX)\cdot(CAY)>0$$

egyenlőtlenség. Ceva szerint azonban ennél többet is tudunk mondani.

Ceva*-féle tétel: Ha az* ABC *háromszög* BC, CA, AB *oldalegyenesein rendre* X, Y, Z *háromszög csúcsaitól különböző olyan pontok, hogy* AX, BY, CZ *egyenesek egy* S *pontban találkoznak, akkor*

$$(ABZ)\cdot(BCX)\cdot(CAY)=+1.$$



7. ábra

Bizonyítás (7. ábra). Alkalmazzuk a Menelaos-féle tételt a ZCA háromszög BY szelőjére, valamint a BCZ háromszög AX szelőjére. A tételt képező egyenlőséget mindkét esetben részletes alakban írjuk ki:

$$\frac{ZS}{SC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AB}{BZ}=-1, \quad \text{és} \quad \frac{BX}{XC}\cdot\frac{CS}{SZ}\cdot\frac{ZA}{AB}=-1.$$

E két egyenlőség szorzatából, ha még az irányított szakaszokra érvényes

$$\frac{ZS}{SZ}=-1, \qquad \frac{CS}{SC}=-1, \qquad \frac{ZA}{BZ}=\frac{AZ}{ZB}$$

egyenlőségeket is tekintetbe vesszük, éppen a bizonyítandó

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=+1$$

adódik.

Ez a tétel úgy fordítható meg, hogy ha az ABC háromszög AB, BC, CA, oldalegyenesein rendre rajta vannak a csúcspontoktól különböző Z, X, Y pontok és fennáll az

$$(ABZ)\cdot(BCX)\cdot(CAY)=+1$$

egyenlőség, akkor az AX, BY, CZ egyenesek vagy egy pontban találkoznak, vagy párhuzamosak egymással.

A tételt itt is a tételt tagadó állítás megcáfolásával igazoljuk.

Tegyük fel, hogy AX és BY egy S pontban metszik ugyan egymást, de CZ egyenes már nem megy át az S ponton. Eszerint CS egyenes vagy egy a Z-től különböző P pontban metszi az AB oldalegyenest, vagy párhuzamos vele.

Ha fellép a P metszéspont, akkor a Ceva-féle tétel szerint

$$(ABP)\cdot(BCX)\cdot(CAY)=+1;$$

ezt a bizonyítandó tétel kirovásával egybevetve

$$(ABZ)=(ABP)$$

következik. Ez azonban képtelenség, mert két különböző ponthoz, ugyanazokra az alappontokra vonatkoztatva, különböző osztóviszony tartozik.

Ha pedig $CS \parallel AB$, akkor az X ponton átmenő BC és AS, valamint az Y ponton átmenő AC és BS egyenesek párhuzamos szelői a CS és az AB egyenesek. Így a párhuzamos szelőkre vonatkozó arányossági tételt alkalmazva:

$$\frac{BX}{XC} = \frac{BA}{SC}, \qquad \frac{CY}{YA} = \frac{SC}{AB}.$$

Tekintetbe véve $BA = -AB$ összefüggést is, a két egyenlőség szorzata:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1.$$

Ezt az alapkirovással egybevetve következik, hogy

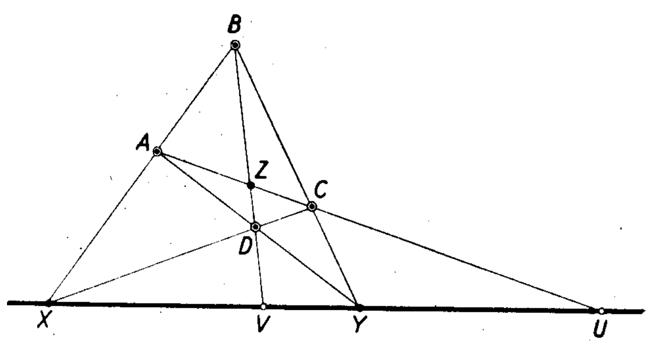
$$(ABZ) = -1.$$

Ez pedig képtelenség, mert – amint már tudjuk – a $v = -1$ osztóviszonyhoz nem tartozik viszonyított pont.

Annak a bizonyítása pedig, hogy ha állnak a tétel kirovásai, de az AX BY, CZ egyenesek bármely ketteje nem metszi, egymást, vagyis párhuzamosak, akkor a harmadik is párhuzamos velük, már könnyen megy, az olvasóra bízzuk.

4. A harmonikus pontnégyes

Tekintsük A, B, C, D pontokat a síkon, ha közülük semelyik három sem esik egy egyenesbe (8. ábra).



8. ábra

Az ilyen négy pont ún. *teljesnégyszöget* létesít. A teljesnégyszög *szögpontokból* és *oldalakból* álló alakzat; szögpontjai az A, B, C, D pontok és oldalai az AB, CD, AC, BD, AD, BC, egyenesek.

Bármelyik oldalnak van egy *átellenes* párja. Az oldal két szögpontot köt össze, az átellenese pedig a többi két szögpontot. Így az átellenes oldalak párokat alkotnak:

AB párja CD, AC párja BD, AD párja BC.

A párok egy-egy metszéspontot szolgáltatnak – ha csak nem párhuzamosak – az X, Y, Z pontokat. Ezeket *átlóspontoknak* nevezzük.

Tekintsünk most egy három átlósponttal rendelkező teljesnégyszöget, amilyen az ábrán is szerepel. Az XY egyenest az X, Y, átlóspontokon át nem menő AC és BD oldalak úgy metszik U és V pontokban, hogy az X, Y *alappontokra* és U, V *viszonyított* pontokra nézve fennáll az

$$(H) \qquad \frac{(XYU)}{(XYV)} = \frac{XU}{UY} : \frac{XV}{VY} = -1$$

összefüggés. Úgy mondjuk *e relációnak megfelelő* egyenesvonalú pontnégyes viszonyát, hogy az X, Y; U, V pontpárok *harmonikus pontnégyest* alkotnak. Bizonyítsuk is be a (H) reláció helyességét.

Tekintsük evégből az XYB háromszöget, a d egyenest és a D pontot. Alkalmazzuk ezekre az elemekre a Menelaos-féle és a Ceva-féle tételt:

$$(XYU) \cdot (YBC) \cdot (BXA) = -1$$

és

$$(XYV) \cdot (YBC) \cdot (BXA) = +1.$$

(A háromszög oldalait d egyenes U, C, A pontokban metszi. D pontot pedig a háromszög csúcsaival összekötő egyenesek a szemközti oldalakból kimetszik a V, C, A pontokat.) E két egyenlőség hányadosaként éppen a bizonyítandó egyenlőség adódik.

A középiskolai matematika és fizika tananyagában több helyütt szerepel harmonikus pontnégyes. Így pl. ha $AC = BC$, akkor az ABC háromszög AB oldalát a C-nél levő szög külső és belső felezőegyenese olyan pontpárban metszi, mely az A, B alappontpárral együtt harmonikus négyest alkot. pl. a 2. ábrán az A, B; X, Y pontnégyes. Más példa: ha kisnyílású homorú gömbtükörnek középpontja (vagyis a tükröző gömbsüveg középpontja) G, a gömb középpontja O, a GO tengely, tetszőleges T pontjának képe K, akkor a G, O alappontpár a T, K pontpárral együtt harmonikus négyest alkot.

Tekintsük a számegyenesen a

$$0, \frac{1}{k-1}, \quad \frac{1}{k}, \quad \frac{1}{k+1}$$

számokat képviselő pontokat. Vegyük alappontoknak az első és harmadik pontot, viszonyított pontoknak a negyedik és a második pontot. Rövid számolással az derül ki, hogy ezek is harmonikus pontnégyest alkotnak. Ebből érthető az is, hogy miért nevezik az

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \dots$$

(0-hoz tartó) számsorozatot harmonikus sorozatnak,

Az osztóviszony, valamint a harmonikus pontnégyes fogalma, továbbá a Ceva- és a Menelaos-féle tétel, valamint e tételek megfordítottja több, sorrakövetkező feladat megoldásához fogja segíteni az olvasót.