Ez idén e verseny március 8-án folyt le az egyes iskoláknál a szokott szabályok szerint: csak a gimnáziumok és az ipari technikumok III. és IV. osztályú tanulói indulhattak. Munkaidő 5 óra. A résztvevők száma ismét meghaladta a 3000-et. Beadtak összesen 223 iskolában 2823 dolgozatot. (Tavaly 209/2896.) A gimnáziumokra eső rész 164/2149 (tavaly 157/2139) még csak igen kicsiny előnyös változást mutat, de az ipari technikumok adataiból: 59/674 a tavalyi 52/757-tel szemben, már határozottan mutatkozik a »több iskola kevesebb tanuló« tendenciája, ami feltétlenül minőségi javulást jelent.

A versenybizottságnak április 6-i javaslata alapján 341 versenyző (a dolgozatot beadók 12,1%-a) került a döntőbe a tavalyi 287 = 9,8%-kal szemben. Ez a javulás főleg az ipari technikumok vonalán történt előnyös eltolódásnak köszönhető. Ugyanis amíg tavaly 29 ip. technikumnak 41 tanulója (a dolgozatot beadók 5,4%-a) került a döntőbe, addig ez idén 33 ip. technikumnak 81 tanulója (12,0%) nyert jogot a II. fordulóban való részvételre. Részletes adatok megyék és iskolafajok szerint az itt közölt táblázatban találhatók.

A döntőbe került 341 tanuló közül csak 148-an (43,4%) lapunk feladatmegoldói, ami ismét felderíti azt a sajnálatos tényt, hogy igen sok, matematikában tehetséges, tanuló nem forgatja lapunkat, és megmutatja, mennyire indokolatlan számos iskola teljes passzivitása a »Középiskolai Matematikai Lapok«-kal szemben.

Amíg a tavalyi R. M. versenyen helyezést elért 29 III. osztályú tanuló ez idén, kivétel nélkül, mind bekerült a döntőbe, addig a tavalyi Arany Dániel versenyen helyezett 30 II. oszt. tanuló közül 11-nek nem sikerült ezúttal az R. M. verseny II. fordulójába kerülni.

Alább közöljük a kitűzött három feladatot a megoldásokkal együtt.

1. feladat. *Adva van valamely mértani sorozat első tagja, utolsó tagja és tagjainak száma. Mekkora tagjainak szorzata?*

I. megoldás: Jelöljük a keresett szorzatot P_n-nel.

$$P_n = a_1 a_2 \dots a_n = a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \dots a_1 q^{n-1} = a_1^n \cdot q^{1+2+\dots+(n-1)}.$$

A q kitevőjében levő számtani sorozat összege $\dfrac{(n-1)n}{2}$, és így

(1) $$P_n = a_1^n q^{\frac{(n-1)n}{2}} = a_1^n \left(q^{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Mivel $a_1 q^{n-1} = a_n$, azért

$$q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1},$$

mely értéket (1)-be helyettesítve

$$P_n = a_1^n \frac{a_n{}^{\frac{n}{2}}}{a_1{}^{\frac{n}{2}}} = a_1{}^{\frac{n}{2}} a_n{}^{\frac{n}{2}} = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}.$$

Megjegyzés: Az (1) alatti kifejezés a következőképpen is átalakítható

$$a_1^n (q^{n-1})^{\frac{n}{2}} = (a_1^2 q^{n-1})^{\frac{n}{2}} = (a_1 \cdot a_1 q^{n-1})^{\frac{n}{2}} = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}.$$

II. megoldás:

(1) $$P_n = a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \dots a_1 q^{k-1} \dots a_1 q^{n-1}$$

a mértani sorozat tagjait mint tényezőket a_n-től kezdve fordított sorrendbe írva

(2) $$P_n = a_n \cdot \frac{a_n}{q} \cdot \frac{a_n}{q^2} \dots \frac{a_n}{q^{k-1}} \dots \frac{a_n}{q^{n-1}}.$$

(1) és (2) szorzata úgy képezhető, hogy az egymás alatt álló tényezőket páronként összeszorozzuk. Tehát

$$P_n^2 = (a_1 a_n)(a_1 a_n) \dots (a_1 a_n) \dots (a_1 a_n) = (a_1 a_n)^n,$$

amiből

$$P_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n} = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}$$

Kimutatás az 1955. évi Rákosi Mátyás matematikai verseny I. fordulójáról megyék és iskolafajok szerint

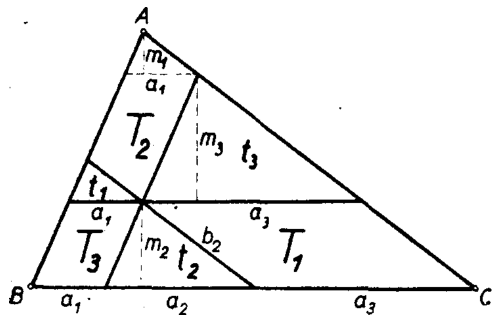
Megyék és Budapest	Beadott dolgozatok						Döntőbe került					
	gimnázium		ip. techn.		Összesen		gimnázium		ip. techn.		Összesen	
	is ko la	ta nu ló	is ko la	ta nu ló	is ko la	ta nu ló	is ko la	ta nu ló	is ko la	ta nu ló	is ko la	ta nu ló
1. Baranya	6[1]	117	3	58	9	175	2[4]	6	2	6	4	12
2. Bács-Kiskun	8	80	1	1	9	81	5	10	1	1	6	11
3. Békés	10	93	1	18	11	111	4	6	–	–	4	6
4. Borsod	8	95	5	79	13	174	8	20	2	5	10	25
5. Csongrád	7[2]	124	3	49	10	173	5	6	2	6	7	12
6. Fejér	2	25	3	19	5	44	1	4	2	3	3	7
7. Győr-Sopron	9	131	4	36	13	167	5	10	1	1	6	11
8. Hajdu-Bihar	9	108	3	28	12	136	6	11	1	2	7	13
9. Heves	4	46	1	1	5	47	3	8	1	1	4	9
10. Komárom	8	77	2	7	10	84	4	11	1	1	5	12
11. Nógrád	2	15	1	3	3	18	1	1	1	3	2	4
12. Pest	8	65	1	11	9	76	5	6	1	2	6	8
13. Somogy	4	63	1	20	5	83	2	3	–	–	2	3
14. Szabolcs-Szatmár	6	93	2	21	8	114	2	2	1	1	3	3
15. Szolnok	11	101	2[3]	10	13	111	5	6	1[3]	1	6	7
16. Tolna	6	73	–	–	6	73	1	2	–	–	1	2
17. Vas	9[4]	104	1	3	10	107	5[7]	11	1	2	6	13
18. Veszprém	6	94	2	31	8	125	5	14	1	1	6	15
19. Zala	2	18	2	17	4	35	1	1	1	3	2	4
Vidék	125	1522	38	412	163	1934	70	138	20	39	90	177
20. Budapest	39[5]	627	21	262	60	889	33[8]	122	13	42	46	164
Összesen	164	2149	59	674	223	2823	103	260	33	81	136	341

[0]

[1] 1 szakéretts. tanf. ...... 24 dolg.
[2] 1 ” ” ..... 5 ”
[3] 1 mezőgazd. techn. ..... 1 ”
[4] 1 szakéretts. tanf. ..... 28 ”
[5] 1 szakéretts. tanf. ...... 2 dolg.
[6] 1 ” ” ..... 2 ”
[7] 1 ” ” ..... 2 ”
[8] 1 ” ” ..... 2 ”

2. feladat. *Egy háromszög belsejében felvett tetszőleges ponton át a háromszög oldalaival párhuzamos egyeneseket húzunk. Ezek az egyenesek a háromszög területét hat részre osztják. Mekkora az adott háromszög területe, ha adva van a keletkezett 3 háromszög területe: t_n, t_2, t_3?*

I. megoldás: Legyenek a keletkezett részháromszögeknek az adott háromszög a oldalával párhuzamos oldalai rendre a_1, a_2, a_3 és ezen oldalakhoz tartozó magasságok m_1, m_2, m_3. Nyilvánvaló, hogy $a_1 + a_2 + a_3 = a$, és az is könnyen belátható, hogy $m_1 + m_2 + m_3 = m$ (1. ábra), ahol m az adott háromszögnek a oldalához tartozó magassága.



1. ábra

Tehát az adott háromszög területét T-vel jelölve

$$2T = am = (a_1 + a_2 + a_3)(m_1 + m_2 + m_3) =$$

(1) $$a_1m_1 + a_2m_2 + a_3m_3 + (a_1m_2 + a_2m_1) + (a_1m_3 + a_3m_1) + (a_2m_3 + a_3m_2)$$

De $2t_1 = a_1m_1$ és $2t_2 = a_2m_2$; e két egyenlőség szorzata

(2) $$4t_1t_2 = a_1m_1a_2m_2 = (a_1m_2)(a_2m_1)$$

Mivel a részháromszögek – a szögek egyenlősége miatt – mind hasonlók az adott háromszöghöz, és így egymás között is, azért

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_1}{m_2}, \qquad \text{vagyis} \qquad a_1m_2 = a_2m_1.$$

Tehát (2) alapján

$$(a_1m_2)^2 = (a_2m_1)^2 = 4t_1t_2,$$

amiből

$$a_1m_2 = a_2m_1 = 2\sqrt{t_1t_2}, \qquad \text{vagyis} \qquad a_1m_2 + a_2m_1 = 4\sqrt{t_1t_2}.$$

Ugyanígy mutatható meg, hogy

$$a_1m_3 + a_3m_1 = 4\sqrt{t_1t_3} \qquad \text{és} \qquad a_2m_3 + a_3m_2 = 4\sqrt{t_2t_3}.$$

Ezen értékeket (l)-be helyettesítve, és 2-vel osztva

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + 2\sqrt{t_1t_2} + 2\sqrt{t_1t_3} + 2\sqrt{t_2t_3} = \left(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}\right)^2.$$

Megjegyzés: Ha a keletkezett 3 paralelogramma területeit T_1, T_2, T_3-mal jelöljük, amint azt az ábra mutatja, akkor az ábrából közvetlenül leolvasható, hogy

$$a_1m_2 \left(= 2\sqrt{t_1t_2}\right) = T_3, \qquad a_3m_2 \left(= 2\sqrt{t_2t_3}\right) = T_1,$$

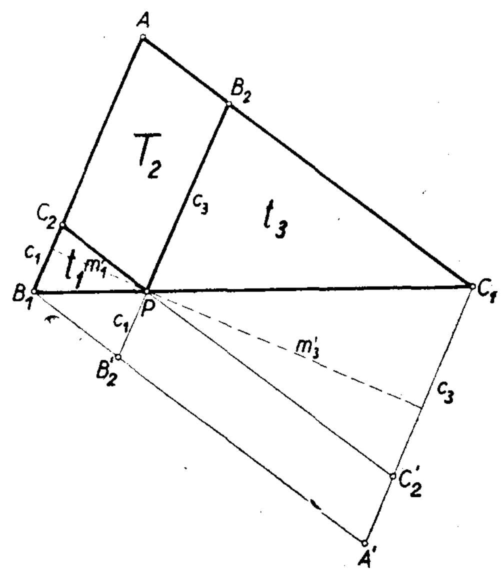
és könnyen belátható (kis területi átalakítás után), hogy

$$a_1m_3 = \left(= 2\sqrt{t_1t_3}\right) = T_2,$$

Eszerint a fenti eredmény a $T = t_1 + t_2 + t_3 + T_1 + T_2 + T_3$ egyenlőség alapján adódik.

Az itt felhasznált összefüggések közvetlen igazolásán (mégpedig a hasonlóság felhasználása nélkül) alapszik a következő megoldás.

II. megoldás: Tekintsük először az ábrának t_1, t_3 és T_2 alkotta részét. A betűzést a 2. ábra mutatja.



2. ábra

Egészítsük ki az AB_1C_1 háromszöget, a B_1C_1 oldal felezőpontjára tükrözve, paralelogrammává és hosszabbítsuk meg a B_2P és C_2P szakaszokat a paralelogramma szemközti oldaláig. Ekkor

$$B_1C_1A_\triangle \cong C_1B_1A'_\triangle, \qquad PB_1C_{2\triangle} \cong B_1PB'_{2\triangle}, \qquad C_1PB_{2\triangle} \cong PC_1C'_{2\triangle}$$

és így a C_2AB_2P paralelogramma T_2 területe megegyezik a $B_2'A'C_2'P$ paralelogrammáéval. Az előbbinek $PB_2 = c_3$, oldalához tartozó magassága egyenlő a t_1 háromszög c_1 oldalához tartozó m_1' magasságával; az utóbbi paralelogramma $PB_2' = c_1$ oldalához tartozó magassága pedig a t_3 háromszög c_3 oldalához tartozó m_3' magasságával. Tehát

$$T_2 = c_3m_1 = c_1m_3',$$

amiből

$$T_2^2 = c_1m_1'c_3m_3' = 4t_1t_3, \qquad \text{vagyis} \qquad T_2 = 2\sqrt{t_1t_3}.$$

Hasonlóképpen adódik, hogy

$$T_1 = 2\sqrt{t_2t_3}, \qquad T_3 = 2\sqrt{t_1t_2},$$

és így

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + 2\sqrt{t_2t_3} + 2\sqrt{t_3t_1} + 2\sqrt{t_1t_2} = \left(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}\right)^2.$$

III. megoldás: Legegyszerűbben úgy jutunk célhoz, ha felhasználjuk azt az ismeretes tételt, mely szerint hasonló háromszögek területei úgy aránylanak egymáshoz, mint a megfelelő oldalak négyzete.

Tehát

$$\sqrt{t_1} : \sqrt{T} = a_1 : (a_1 + a_2 + a_3),$$
$$\sqrt{t_2} : \sqrt{T} = a_2 : (a_1 + a_2 + a_3),$$
$$\sqrt{t_3} : \sqrt{T} = a_3 : (a_1 + a_2 + a_3).$$

Összeadva

$$\frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{t_2}}{\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{t_3}}{\sqrt{T}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1 + a_2 + a_3} = 1,$$

ahonnan,

$$\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3} = \sqrt{T},$$

vagyis

$$T = \left(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}\right)^2.$$

3. feladat. *Két munkás* A *és* B *valamely rájuk bízott munkát a következőképpen végzett el. Először csak* A *dolgozott* $\frac{2}{3}$ *annyi ideig, mint amennyi idő alatt* B *egyedül elvégezné az egész munkát. Azután* B *felváltotta* A*-t és befejezte a munkát. Ilyen módon a munka 2 órával több időt vett igénybe, mintha együtt fogtak volna hozzá és együttesen* *végezték volna el. Ha együtt dolgoztak volna az utóbbi módon, akkor* A *fele annyi munkát végzett volna, mint amennyit ténylegesen* B*-re hagyott. Hány óra alatt végezné el a munkát* A*, illetőleg* B *egyedül?*

I. megoldás: Legyen az adott munka egységnyi. Tegyük fel, hogy a munkát

A x óra alatt végezné el, tehát 1 óra alatt $\frac{1}{x}$ munkát teljesít,

B y óra alatt végezné el, tehát 1 óra alatt $\frac{1}{y}$ munkát teljesít.

Együttesen tehát 1 óra alatt $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$ munkát teljesítenek, az egész munkát tehát $1\colon \frac{x+y}{xy}=\frac{xy}{x+y}$ óra alatt végeznék el együttesen.

A $\frac{2}{3}$ y óráig dolgozott, és ezalatt $\frac{2y}{3}\cdot\frac{1}{x}=\frac{2y}{3x}$ munkát végzett el, és B-re hagyott $1-\frac{2y}{3x}=\frac{3x-2y}{3x}$ munkát.

Ha együttesen dolgoztak volna, A $\frac{xy}{x+y}$ óra alatt $\frac{xy}{x+y}\cdot\frac{1}{x}=\frac{y}{x+y}$ munkát teljesített volna és ez a feladat szerint fele az A által ténylegesen B-re hagyott munkának, vagyis

$$\frac{2y}{x+y}=\frac{3x-2y}{3x}. \tag{1}$$

B a reáhagyott munkát $y\cdot\frac{3x-2y}{3x}=\frac{3xy-2y^2}{3x}$ óra alatt végezte el. A feladat szerint A és B egymás utáni munkaidejének összege 2 órával haladja meg azt a munkaidőt, amely alatt együttesen végeznék el a munkát. Tehát

$$\frac{2y}{3}+\frac{3xy-2y^2}{3x}=\frac{xy}{x+y}+2 \tag{2}$$

(1)-et rendezve

$$3x^2-5xy-2y^2=0.$$

Ezt az egyenletet x-re megoldva nyerjük (az $x=-\frac{y}{3}$ gyöktől, mint értelmetlentől, eltekintve), hogy

$$x=2y.$$

(Természetesen ugyanazt kapjuk y^2-tel való osztás után, az $\frac{x}{y}$-ra adódó másodfokú egyenletből is.)

x ezen értékét (2)-be helyettesítve

$$\frac{4y}{3}=\frac{2y}{3}+2,$$

amiből $y-3$, és így $x=2y=6$.

Tehát A 6, B 3 óra alatt végezné el a munkát egyedül.

II. megoldás: Alább adunk egy megoldást, amelyben az (1) egyenletben csak egy ismeretlen fordul elő, a (2) egyenletet pedig következtetés pótolja.

A szövegben szereplő második kapcsolat nem tartalmaz abszolút adatokat, csak annak arányára vonatkozik, ahogyan A és B osztozik a végzett munkában, így várható, hogy ez az arány meg is határozható belőle. Tegyük fel, hogy egyenlő idő alatt B λ-szor annyi munkát végez el mint A. Ekkor együtt dolgozva az egész munka $1:\lambda$ arányban oszlik meg A és B közt, tehát A az egész munka $\frac{1}{1+\lambda}$-ad részét végzi el, B a $\frac{\lambda}{1+\lambda}$-ad részét. Valójában A annyi ideig dolgozott, amennyi alatt B az egész munka $\frac{2}{3}$-át végezné el. Mivel ő B munkájának az $\frac{1}{\lambda}$-szorosát végzi el, így az egész munkának $\frac{2}{3\lambda}$-ad részét végezte el ténylegesen s így $1-\frac{2}{3\lambda}$-nyi részét hagyta B-re. A szöveg szerint ez kétszerese annak a munkának, ami B-vel együtt dolgozva A-ra jutott volna, tehát

$$1-\frac{2}{3\lambda}=\frac{2}{1+\lambda},\qquad (3\lambda-2)(1+\lambda)=6\lambda,\qquad 3\lambda^2-5\lambda-2=0.$$

A negatív gyököt, mint értelmetlent elhagyva, innen $\lambda=2$. Ez azt jelenti, hogy együtt dolgozva A a munka $\frac{1}{3}$-át, B a $\frac{2}{3}$-át végezné el. Ha tehát A $\frac{2}{3}$-annyi ideig dolgozott, mint amennyi idő alatt B az egész munkát elvégezné, akkor egyszersmind annyi ideig dolgozott, amennyi idő alatt együttesen elvégezték volna a munkát és ezalatt a munka $\frac{1}{3}$ részét végezte el. Így B a szöveg első részéből következően 2 órát dolgozott és a munka $\frac{2}{3}$ részét végezte el, tehát 3 óra alatt végezné el az egész munkát. Mivel pedig B kétszer annyi munkát végez, mint amennyit A ugyanezen idő alatt végezne, így A 6 óra alatt készülne el az egész munkával.

*

Mind a három feladatot 87 versenyző oldotta meg, közülük számosan többletteljesítményt is nyújtottak. A legkönnyebbnek az 1. feladat bizonyult, de itt is – éppen úgy, mint a 2. feladatnál – gyakori volt, hogy a versenyzők nem hozták az eredményt a legegyszerűbb alakra. Súlyosabb hiba volt természetesen, ha az 1. feladat eredményében benne hagyták a q-t, amely nem volt megadva. A legkevesebben oldották meg a 3. feladatot. Itt számosan követték el azt a hibát, hogy a »*ténylegesen*« (egymás után) lefolyt munkát összetévesztették a »*feltételezett*« (egymás melletti, együttes) munkával, annak ellenére, hogy a feladat szövegében határozottan ki van hangsúlyozva » … amennyit *ténylegesen* B-re hagyott«.

Mivel *jelen* esetben *véletlenül* mindkét munkafolyamat esetén A a munka $\frac{1}{3}$ részét végzi el, azért a helytelenül okoskodók is – mégpedig igen egyszerű úton – helyes eredményre jutottak, de a feladatot természetesen nem oldották meg. A helyes megoldók között sokan csak 3–5 ismeretlenű, komplikált egyenletrendszeren át, fáradságos munkával jutottak eredményhez.