Írjuk a sorozat általános tagját így:

$$a(t) = \frac{1}{4}\left[(2t-5)^2 - 1\right], \tag{1}$$

ekkor az $a(t)$, $a(u)$, $a(v)$ számok számtani sorozat voltát biztosító

$$a(t) + a(v) = 2a(u) \tag{2}$$

összefüggés ilyen alakra hozható:

$$(2t-5)^2 + (2v-5)^2 = 2(2u-5)^2. \tag{3}$$

Itt mindegyik alap páratlan, így 2-vel osztva és az

$$\frac{1}{2}(A^2+B^2) = \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 + \left(\frac{A+B}{2}\right)^2$$

átalakítást alkalmazva a

$$(v-t)^2 + (v+t-5)^2 = (2u-5)^2$$

pitagoraszi egyenletet kapjuk. Bevezetve az

$$x = v - t, \qquad y = v + t - 5, \qquad z = 2u - 5$$

jelöléseket, az x, y, z pitagoraszi számhármas akkor felel meg követelményeinknek, ha a befogók különbsége

$$y - x = 2t - 5,$$

ahol $2t-5$ az előre adott t egész számból származó páratlan szám, és ekkor a keresett u, v számok

$$u = \frac{z+5}{2}, \qquad v = \frac{x+y+5}{2}$$

alakban adhatók meg. Ezek egészek, mert x, y egyike páros, másika páratlan, ezért egyrészt $x+y$, másrészt a pitagoraszi egyenlet miatt z is páratlan.

Eszerint a legismertebb pitagoraszi számhármas,

$$x = 3k, \quad y = 4k, \quad z = 5k, \tag{5}$$

eleget tesz ezeknek a követelményeknek, ha

$$k = y - x = 2t - 5.$$

Innen az u, v párra a következő előállítást kapjuk:

$$u = \frac{z+5}{2} = \frac{5k+5}{2} = \frac{10t-25+5}{2} = 5t - 10,$$
$$v = \frac{x+y+5}{2} = \frac{7k+5}{2} = \frac{14t-35+5}{2} = 7t - 15.$$

Így tetszőleges t egész számhoz megadtunk egy megfelelő u, v egész számpárt, és ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. Megoldásunk alapján a feladat állítása úgy is fogalmazható, hogy tetszőleges páratlan számhoz megadható egész oldalakkal bíró derékszögű háromszög, melyben a befogók különbsége az előre adott számmal egyenlő.

2. Újabb u, v számpárt kapunk az $a(t)$ függvény

$$a(t) = a(5-t)$$

tulajdonsága alapján. A már előállított u, v értékek helyett tehát vehetjük az

$$u' = 5 - (5t-10) = -5t + 15,$$
$$v' = 5 - (7t-15) = -7t + 20$$

számpárt, továbbá az (u, v'), (u', v) párokat is.

3. Természetesen úgy is kaphatunk újabb előállítást az u, v számpárra, ha (5) helyett más alkalmas pitagoraszi számhármasból indulunk ki (ti. olyanból, amelynek alapmegoldásában a befogók szomszédos egész számok). Így megfelel pl. az

$$x = 20k, \quad y = 21k, \quad z = 29k \tag{5'}$$

számhármas is, melyből az

$$u = 29t - 70, \quad v = 41t - 100$$

számpárt kapjuk.

4. A feladat hasonlóan megoldható, $a(t)$-nek tetszés szerinti $t^2 + pt + q$ másodfokú polinomot véve, ahol p egész.