Jelöljük (1) két oldalának közös értékét röviden z-vel. Így a bal oldal első tagja $z+1$, és a logaritmus értelmezése szerint

$$xy+4=2^{z+1}, \qquad x^2+y^2+2=3^z.$$

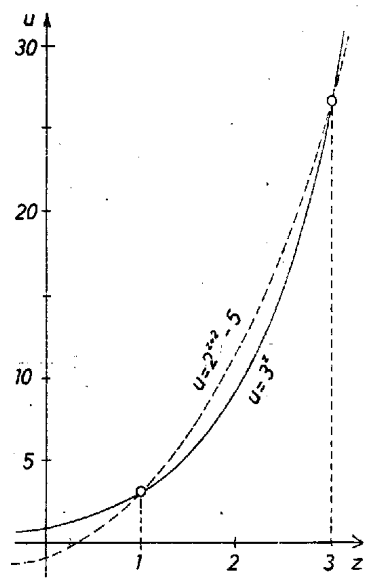
(2) behelyettesítése után x is könnyen kiküszöbölhető a rendszerből:

$$x^2-x=2^{z+1}-4, \qquad 2x^2-2x=3^z-3, \tag{3}$$

tehát a második egyenlet jobb oldala 2-szer akkora, mint az elsőé:

$$3^z-3=2(2^{z+1}-4),$$
$$3^z=2^{z+2}-5.$$

Eszerint z-t megadja a derékszögű z, u koordinátarendszerben felrajzolt $u=3^z$ görbe, valamint a balra 2 és lefelé 5 egységgel eltolt $u=2^z$ görbe közös pontjának abszcisszája (1. ábra).



1. ábra

1. ábra

Két közös pontot találunk: $z=1$ és $z=3$ fölött.

Mármost $z=1$ esetén (3)-ból

$$x^2-x=0,$$

és így, (2)-t is figyelembe véve

$$x_1=0, \qquad y_1=-1; \qquad\qquad x_2=1, \qquad y_2=0;$$

$z=3$ esetén pedig hasonlóan

$$x_3=-3, \qquad y_3=-4; \qquad\qquad x_4=4, \qquad y_4=3.$$

Mind a négy értékpár valóban kielégíti az eredeti egyenletrendszert.

Bogár Dezső (Tatabánya, Árpád Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Csak alakilag különböző megoldást kapunk, ha megmaradunk a logaritmusoknál. (2)-t felhasználva (1) a következő alakot ölti:

$$\log_2(x^2-x+4)-1=\log_3\left[2(x^2-x)+3\right],$$

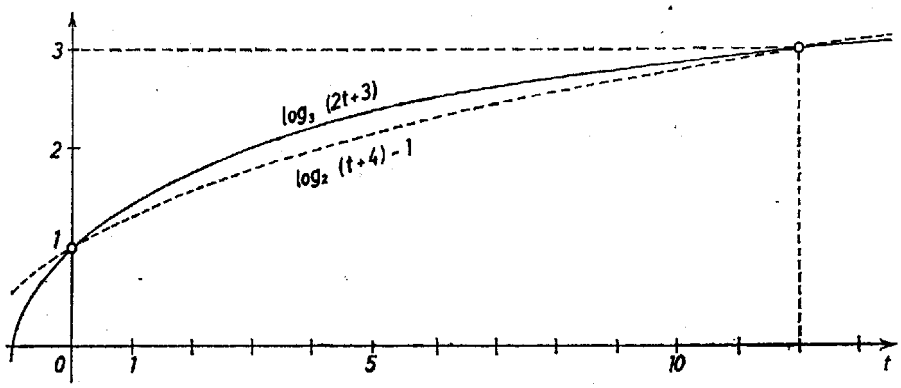
eszerint a mindkét oldalon fellépő

$$x^2-x=t \tag{4}$$

kifejezésnek olyan értékeit keressük, amelyekre a

$$\log_2(t+4)-1 \quad \text{és} \quad \log_3(2t+3)$$

függvények értéke megegyezik. Az ilyen t értékekhez a megfelelő x értékeket (4)-ből már könnyen megkapjuk, y-t pedig (2)-ből.



2. ábra

A két függvényt ábrázolva (2. ábra) $t=0$-nál és $t=12$-nél találunk közös értékeket (1, ill. 3), az ezekhez tartozó x és y értékek pedig:

t	0		12	
x	0	1	-3	4
y	-1	0	-4	3

Géczy István (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o. t.)

2. A megoldás egyik változatában sem bizonyítottuk be, hogy a 2–2 görbének nincs több metszéspontja, mert ehhez az iskolában tanultak nem adnak megfelelő alapot.