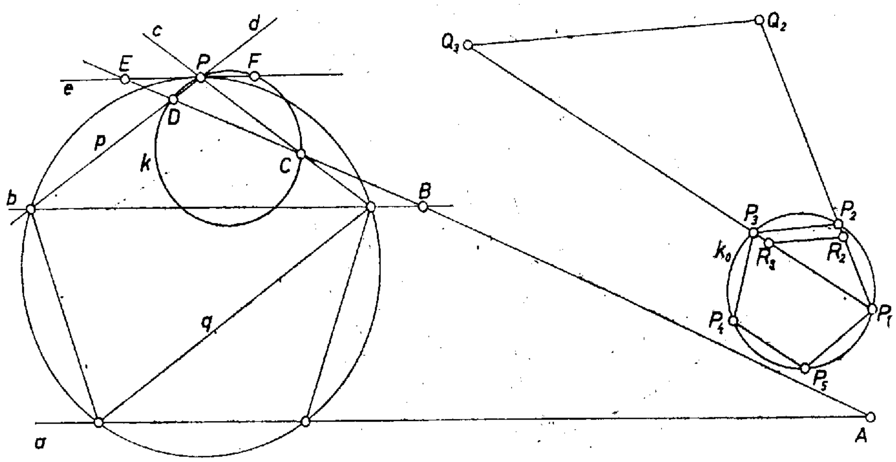
I. megoldás. Jelöljük a keresett ötszögnek az adott A, C, D, pontokon átmenő oldalegyeneseit, ill. a B ponton átmenő átlójának egyenesét rendre a, c, d, ill. b betűvel. A b, c, d egyenesek egyenlő szárú háromszöget határoznak meg, melynek b-n van az alapja, és az ezen fekvő szögei $36°$-osak; az a egyenes pedig párhuzamos b-vel. Elegendő ezt a négy egyenest meghatároznunk, hiszen a keresett ötszöget egyértelműen meghatározzák: a b, c, d egyenesek metszéspontjai az ötszög 3 csúcsát adják, az ezeken átmenő kör pedig az a egyenesből kimetszi a hátra levő két csúcsot.

Legyen a c, d egyenesek metszéspontja P. Elegendő ezt meghatároznunk, hiszen PC, PD megadja a c, d egyenest, az általuk meghatározott szögek közül a kisebbiket felező egyenes megadja a és b állását, tehát e szögfelezővel A-n, B-n át húzott párhuzamos adja az a, ill. b egyenest.



1. ábra

Húzzunk párhuzamost P-n át b-vel, jelöljük a kapott egyenest e-vel, az adott szelővel alkotott metszéspontját E-vel. A d egyenesnek e és b közti szakasza egyenlő az ötszög p oldalával, a b és a egyenesek közti szakasza pedig egyenlő az ötszög p-vel párhuzamosan haladó q átlójával. A párhuzamos szelők tétele alapján

$$AB : BE = q' : p. \tag{1}$$

A $q : p$ arány tetszőleges szabályos ötszögben meghatározható, az AB szakaszhoz tehát megszerkeszthetjük a BE szakaszt, az AD egyenesen így kijelölhetjük az E pontot.

P-ből a CD szakasz $108°$-os vagy $72°$-os szög alatt látszik. A megfelelő négy látókörív alkalmas párokba kapcsolva két, a CD egyenesre nézve szimmetrikusan elhelyezkedő kört alkot. Elegendő közülük az egyiket felvennünk, ugyanis a belőle származtatott megoldást az AD egyenesre tükrözve a másikból levezethető megoldást kapjuk. Legyen ez a kör k. Mivel e a c, d egyenesek által meghatározott szögek közül a kisebbiket felezi, egyszersmind k-nak a CD húrhoz tartozó ívei közül a rövidebbet is felezi.

Adataink alapján a k kör és az ennek rövidebb CD ívét felező F pont meghatározható, és ekkor az EF egyenes kimetszi k-ból a keresett P pontot. Ezek szerint a szerkesztés a következő.

Tetszőleges k_0 körbe (az ismert módon) szabályos ötszöget szerkesztünk, legyen ennek három, egymás utáni csúcsa P_1, P_2, P_3. P_1-ből P_3 irányában felmérjük a $P_1Q_3 = AB$ szakaszt. Q_3-on át párhuzamost húzunk P_2P_3-mal, ez a P_1P_2 egyenest Q_2-ben metszi. Ekkor a Q_2Q_3 szakaszt az AB szakasz B-n túli meghosszabbítására felmérve kapjuk E-t.

Mérjük fel P_1-ből P_3 felé a $P_1R_3 = CD$ szakaszt és messük az R_3-on átmenő, P_2P_3-mal párhuzamosan húzott egyenessel P_1P_2-t R_2-ben. A CD szakasz fölé a $P_1R_2R_3$ háromszöggel egybevágó háromszöget szerkesztünk, ennek harmadik csúcsa $F(CF = DF)$. A CDF háromszög köré írt k kört az EF egyenes másodszor a P pontban metszi. P ismeretében a keresett ötszög a fent előre leírt módon határozható meg.

A szerkesztés mindig végrehajtható. Megemlítjük, hogy ha P a C ponttal azonosnak adódik, akkor a c egyenest nem határozzák meg a P, C pontok, így C-t a PD egyenesnek PF-re vonatkozó tükörképeként kell előállítanunk. Ekkor az adott szelő az ötszög egyik oldalegyenese. (A szelőnek bármely a C utáni D' pontjából kiindulva ugyanaz az ötszög adódik.) Hasonló a helyzet, ha P a D-vel adódik azonosnak.

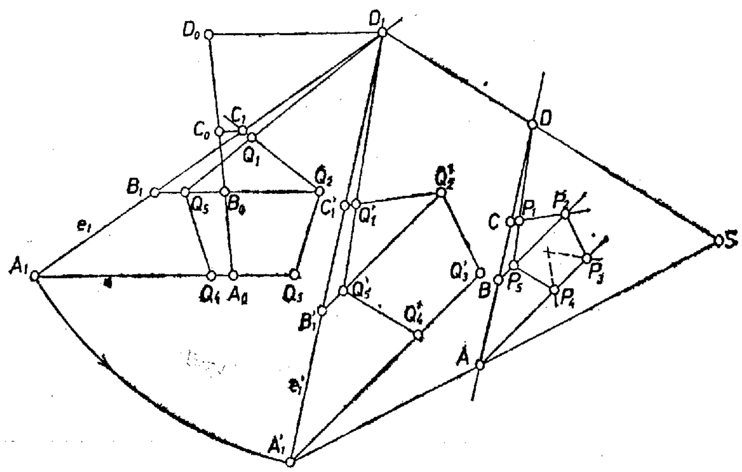
Megmutatjuk, hogy a kapott ötszög valóban szabályos. Mivel F felezi k-nak a c, d egyenesek közti rövidebb ívét, e felezi a c, d egyenesek által meghatározott kisebbik szöget. b-t e-vel párhuzamosnak szerkesztettük, a b, c, d egyenesek tehát egyenlő szárú H háromszöget határoznak meg, amelynek alapja b-n van és az alapján levő szögek $36°$-osak (egyenlők a c, d közti kisebbik szög, a $72°$ felével). A H köré írható körbe írt, P csúcsú szabályos ötszög P-vel szomszédos csúcsai tehát azonosak H megfelelő csúcsaival. Az ötszög P-vel szemközti a^* oldalának b-től mért távolsága úgy aránylik b-nek P-től mért távolságához, mint az ötszög átlója az oldalához, tehát mint AB a BE szakaszhoz. Eszerint (1) miatt az a^* egyenes azonos a-val, a kapott ötszög valóban szabályos.

II. megoldás. A feladat megfordításaként először egy alkalmas szabályos ötszöghöz olyan szelő egyenest szerkesztünk, melyen a megfelelő oldal-, ill. átlóegyenesek által kimetszett, egymás utáni A', B', C', D' pontok közti szakaszok aránya megegyezik az adott s szelőn levő szakaszok arányával:

$$A'B' : B'C' : C'D' = AB : BC : CD.$$

Azután ezen ötszög és szelő együttes alakzatát úgy fordítjuk el és nagyítjuk vagy kicsinyítjük, hogy A', B', C', D' megfelelője rendre az adott A, B, C, ill. D pontba essék.

Olyan $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5 = Q$ szabályos ötszögből indulunk ki, melyben a Q_3Q_4 oldal és a vele párhuzamos Q_2Q_5 átló távolsága kisebb az AB szakasznál (2. ábra).



2. ábra

Legyen Q_3Q_4 tetszés szerinti pontja A_0, az A_0 körüli, AB sugarú körnek Q_2Q_5-ön levő pontja B_0, és az A_0B_0 félegyenesen C_0, D_0 az a pont, amelyre $A_0C_0 = AC$, $A_0D_0 = AD$. Húzzunk párhuzamost Q_3Q_4-gyel C_0-on és D_0-on át, és messe ez a Q_1Q_2, ill. Q_1Q_5 egyenest a C_1, ill. D_1 pontban, végül legyen a C_1D_1 egyenesnek Q_3Q_4-en levő pontja A_1, Q_2Q_5-ön levő pontja B_1. Ekkor nyilvánvalóan

$$A_1B_1 : B_1C_1 : C_1D_1 = A_0B_0 : B_0C_0 : C_0D_0 = AB : BC : CD,$$

tehát a keresett szelő a $C_1D_1 = e_1$ egyenes.

Fordítsuk el Q és e_1 alakzatát D_1 körül úgy, hogy a D_1A_1 félegyenes a DA félegyenessel párhuzamos és egyirányú D_1A_1' helyzetbe jusson, és legyen ekkor C_1, B_1, valamint Q új helyzete C_1', B_1', ill. $Q_1'Q_2'Q_3'Q_4'Q_5' = Q'$, továbbá AA_1' és DD_1 metszéspontja S. Így a fentiek szerint BB_1' és CC_1' ugyancsak átmennek S-en, tehát A, B, C, D rendre az A_1', B_1', C_1', D_1 pont képe egy S középpontú, alkalmas arányú hasonlósági transzformációban, ezért a keresett $P_1P_2P_3P_4P_5$ ötszög P_3P_4, P_2P_5, P_1P_2, P_1P_5 oldal–, ill. átlóegyenese rendre az A-n, B-n, C-n, D-n át, rendre $Q_3'Q_4'$-vel, $Q_2'Q_5'$-vel, $Q_1'Q_2'$-vel, ill. $Q_1'Q_5'$-vel párhuzamosan húzott egyenes lesz. Ezek alkalmas párjainak metszéspontja adja P_1-et, P_2-t, P_5-öt, végül P_3-at, P_4-et az A-n át $Q_3'Q_4'$-vel húzott párhuzamosból P_1P_5, ill. P_1P_2 felező merőlegese metszi ki.

A szerkesztés a fentiek szerint egyértelműen végrehajtható. Ha azonban C_1 (vagy D_1) éppen Q_1-be esik, akkor e_1-ként a Q_1Q_5 (ill. Q_1Q_2) oldalegyenes adódik, és D_1 nem egyedüli közös pontja e_1-nek és Q_1Q_5-nek. Ez a kapcsolat természetesen megmarad az elfordítással és nagyítással kapott $P_1P_2P_3P_4P_5$ ötszög és az adott s között is.

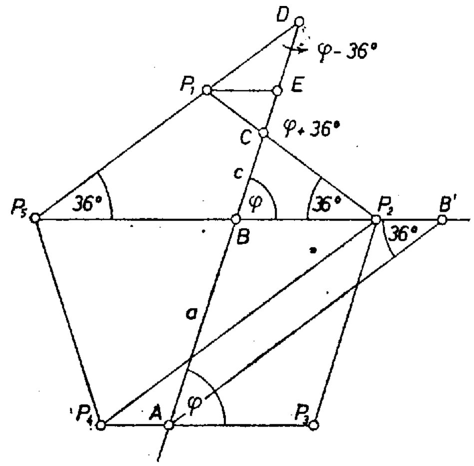
A szerkesztés helyességének bizonyítását az olvasóra hagyjuk.

Kovalszky Róbert (Budapest, Landler J. Gimn.) dolgozatának felhasználásával

Megjegyzés. A megoldás első részében lényegében az s szelő és a P_3P_4 egyenes közti szöget szerkesztettük meg. Ezt számítással készíti elő a következő megoldás.

III. megoldás (vázlat). A fentebbi jelöléseket tovább használva s és a P_3P_4 egyenes közti φ szöget szerkesztjük meg arra a helyzetre, amikor C a P_1P_2 oldalszakaszra jut, D pedig a P_1P_5 oldal meghosszabbítására (3. ábra), számítással előkészítve[1] C és D ezen korlátozása folytán B a P_2P_5 szakaszon van, és $36° \leq \varphi \leq 144°$.

[1]Legtöbb versenyzőnk ezen az úton oldotta meg (vagy közelítette meg) a feladatot, és ugyanez volt a helyzet annak idején a tanulmányi versenyen is.



3. ábra

Legyen $BA = a$, $BC = c$, $BD = d$, és messe P_2P_5-öt az A-n átmenő, P_2P_4-gyel párhuzamos egyenes B'-ben. $P_2CD\sphericalangle = \varphi + 36°$, $BDP_5\sphericalangle = \varphi - 36°$, így a színusz tételt alkalmazva rendre a BAB', BCP_2, BDP_5 háromszögre:

$$AB' = \frac{BA \sin ABB'\sphericalangle}{\sin 36°} = \frac{a \sin \varphi}{\sin 36°},$$

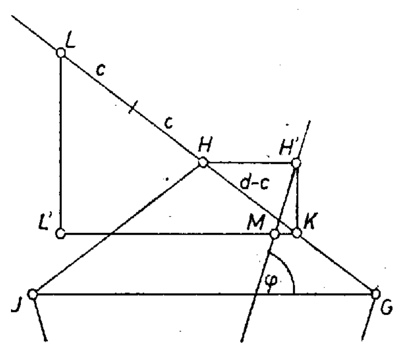
$$P_2B = \frac{c \sin(\varphi + 36°)}{\sin 36°}, \qquad BP_5 = \frac{d \sin(\varphi - 36°)}{\sin 36°}.$$

Ezeket a $P_2B + BP_5 = P_2P_5 = P_4P_2 = AB'$ egyenlőségbe helyettesítve és a közös nevezőt elhagyva

$$c \sin(\varphi + 36°) + d \sin(\varphi - 36°) = a \sin \varphi,$$

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{(c + d) \cos 36° - a}{(d - c) \sin 36°} = \frac{(c + d) \cos 36° - a}{CD \sin 36°} \tag{2}$$

A szükségessé vált 36°-os szöget egy előre megszerkesztett szabályos ötszög három egymás utáni G, H, J csúcsával meghatározott egyenlő szárú háromszögből vesszük (4. ábra).



4. ábra

Felmérjük a HG szárra a $HK = CD$, valamint H-n túli meghosszabbítására a $HL = 2BC$ szakaszt, igy $KL = KH + HL = (d - c) + 2c = = d + c$. K-n át párhuzamost húzunk a GJ alappal, valamint merőlegest rá; legyen L vetülete az előbbin L', és H vetülete az utóbbin H'. Mérjük fel végül L'-től K irányában az $L'M = AB$ szakaszt, ekkor a KMH' szög adja φ-t, ill. kiegészítő szögét, amennyiben M az $L'K$ meghosszabbításán adódott.

A φ szög ismeretében lényegében a II. megoldás befejező része szerint kaphatjuk meg az ötszöget.

Lényegében ugyanígy megy a számítás és a szerkesztés akkor is, ha C, D az 1. vagy a 2. ábra szerint helyezkednek el az E ponthoz viszonyítva.

Megjegyzések. 1. Számításunk kapcsolatba hozható az I. megoldásban felhasznált E ponttal. (2)-t alakítva

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{c + d - \dfrac{a}{\cos 36°}}{CD} \cdot \operatorname{cotg} 36°,$$

másrészt, mint ismeretes,

$$\cos\ 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \qquad \text{és} \qquad q : p = \frac{\sqrt{5}+1}{2} : 1,$$

ezért (1) alapján

$$\frac{a}{\cos\ 36^\circ} = 2\,AB \cdot \frac{p}{q} = 2\,BE,$$

ennélfogva a számláló $(BD - BE) + (BC - BE) = ED - CE$,

$$\operatorname{cotg}\,\varphi = \frac{ED - CE}{CD} \cdot \operatorname{cotg}\,36^\circ.$$

Ezt pedig úgy is megkapjuk, ha a színusz tételt a P_1CD háromszögre írjuk fel, alkalmazzuk a szögfelező osztásarányának tételét (hacsak $\varphi \neq 36^\circ$):

$$\frac{\sin(\varphi + 36^\circ)}{\sin(\varphi - 36^\circ)} = \frac{P_1D}{P_1C} = \frac{ED}{CE},$$

mindkét oldalból 1-et kivonva, ill. mindkettőhöz 1-et hozzáadva

$$\frac{2\,\cos\,\varphi\,\sin\,36^\circ}{\sin(\varphi - 36^\circ)} = \frac{ED - CE}{CE}, \qquad \frac{2\,\sin\,\varphi\,\cos\,36^\circ}{\sin(\varphi - 36^\circ)} = \frac{CD}{CE},$$

végül ezek hányadosa azonos (3)-mal.

2. Az E pontnak pl. C-vel való egybeesése most már azt jelenti, hogy $a : c = AB : BC = AB : BE = q : p = 2\,\cos\ 36^\circ$, így (2) számlálója $(d - c)\cos\ 36^\circ$, és ezért d értékétől függetlenül $\varphi = 36^\circ$.