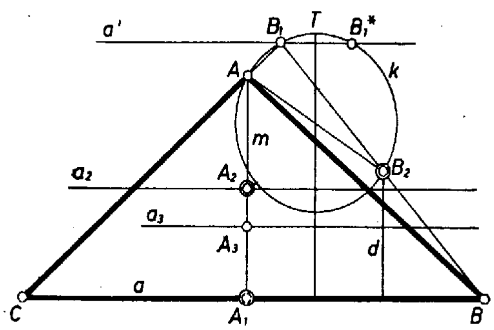
I. Az A_1 talppontnak az A_2 felezőpontra vett tükörképe a háromszög A csúcsa, a további két csúcs pedig az A_1-ben A_1A_2-re állított merőlegesen, az a oldalegyenesen lesz (1. ábra).



1. ábra

Az eddigiek alapján két mértani helyet kapunk a B-ből húzott magasság B_1 talppontja számára. Egyrészt rajta lesz az AB_2 szakasz fölötti k Thalész körön, másrészt – mint a B csúcs B_2-re való tükörképe – rajta lesz az a egyenes B_2-re való a' tükörképén; ezek szerint B_1 a k és a' vonalak közös pontja. (Megjegyezzük, hogy nem lehet B_1 a B_2-vel azonos, hiszen B_1 a B-ből induló magasságszakasz másik végpontja, B_2 pedig e szakasz felezőpontja.) Végül a B csúcs B_1-nek B_2-re vonatkozó tükörképe lesz, C-t pedig a B_2B_1 egyenesre B_1-ben emelt merőleges b egyenes metszi ki a-ból.

A szerkeszthetőség feltétele tehát, hogy k-nak és a'-nek legyen B_2-től különböző metszéspontja, és a b egyenes messe a-t. Ha a szerkesztés végrehajtható, a kapott háromszög megfelel a feladat követelményeinek, hiszen A és a szerkesztése miatt A_1 és A_2 valóban az A-ból induló magasságszakasz végpontja és felezőpontja; a b egyenes átmegy az A csúcson Thalész tétele miatt, tehát oldalegyenese a kapott háromszögnek, így BB_1 magasságszakasz, és B_2 ennek felezőpontja.

Általában annyi megoldása van a feladatnak, ahány közös pontja van k-nak és a'-nek. Kivételt képez azonban az az eset, amikor az egyik közös pont azonos B_2-vel, mert a' átmegy B_2-n. Ez csak úgy adódhat, ha már a is átmegy B_2-n. Ha tehát B_2 az a egyenes A_1-től különböző pontja, vagyis a $B_2A_1A_2$ szög derékszög, akkor 1 megoldás van; ha pedig B_2 és A_1 azonos, akkor nincs megoldás.

További kivételes eset, ha b párhuzamosnak adódik a-val, tehát azonos az a-val párhuzamos, A-n átmenő egyenessel. Ez csak úgy adódhat, ha B_2 az A_2-n átmenő, a-val párhuzamos a_2 egyenesen van. Ha tehát B_2 az a_2 egyenes A_2-től különböző pontja, vagyis a $B_2A_2A_1$ szög derékszög, akkor 1 megoldás van; ha pedig B_2 azonos A_2-vel, akkor nincs megoldás.

A továbbiakban feltesszük, hogy B_2 nincs rajta az a, a_2 egyenesek egyikén sem. Legyen először B_2 az a egyenesnek A-t tartalmazó oldalán. Ekkor a k kör a-tól legmesszebb levő T pontjának az a-tól mért távolsága

$$r+\frac{d+m}{2},$$

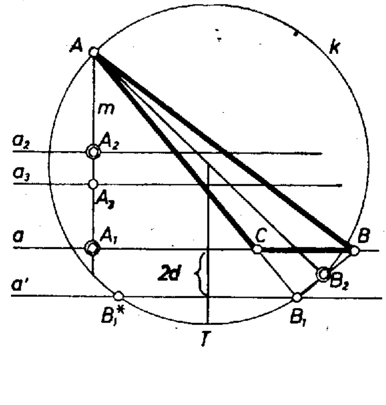
ahol r a k kör sugara, d és m a B_2, ill. A pont a-tól mért távolsága. Ekkor k és a' metszésének feltétele:

$$r+\frac{d+m}{2}\geq 2d, \qquad (1) \qquad d-\frac{m}{3}\leq\frac{2}{3}r.$$

Amennyiben itt egyenlőség teljesül, egy közös pont van, ha pedig az egyenlőtlenség teljesül, akkor kettő.

Ha B_2 az a egyenes A-t nem tartalmazó oldalán van, akkor a metszés feltétele:

$$r-\frac{m-d}{2}\geq 2d, \qquad d+\frac{m}{3}\leq\frac{2}{3}r.$$



Eredményeink összefoglalása céljára húzzunk párhuzamost a-val az A_1A szakasz A_1-hez közelebbi A_3 harmadoló pontján át, legyen ez a_3. Ha B_2-nek A-tól mért távolsága r_1 (a fenti $2r$), és a_3-tól mért távolsága r_2 (a fenti jelöléssel $\left|d-\frac{m}{3}\right|$, ill. $\left.d+\frac{m}{3}\right)$, akkor

$$\begin{aligned} r_2 < r_1/3 &\quad \text{esetén két megoldás van,} \\ r_2 = r_1/3 &\quad \text{esetén egy megoldás,} \\ r_2 > r_1/3 &\quad \text{esetén pedig nincs megoldás.} \end{aligned}$$

II. Az $r_2 = r_1/3$ feltételnek eleget tevő pontok mértani helyét koordinátageometriai úton határozzuk meg. Legyen az x tengely az a egyenes, és az y tengely menjen át az A ponton. Ekkor a B_2 (x,y) pontra

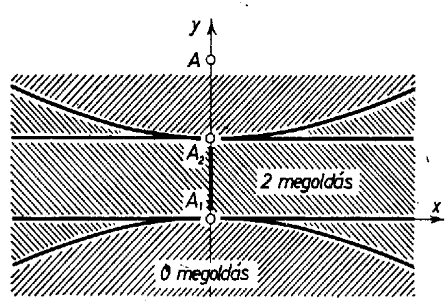
$$r_1^2 = x^2 + (y-m)^2, \quad r_2^2 = \left(y - \frac{m}{3}\right)^2,$$

tehát az $r_2 = \frac{1}{3} r_1$ feltétel szerint

$$\begin{gathered} x^2 + (y-m)^2 = 3^2 \left(y - \frac{m}{3}\right)^2, \\ x^2 + y^2 - 2ym + m^2 = 9y^2 - 6ym + m^2, \\ x^2 - 8y^2 + 4ym = 0, \\ -\frac{2x^2}{m^2} + \frac{16\left(y - \frac{m}{4}\right)^2}{m^2} = 1. \end{gathered}$$

Ez hiperbola egyenlete, melynek valós tengelye az AA_1 egyenes, csúcsai A_1 és A_2, és egyik fókusza az A pont.

Mármost a hiperbola belsejében, valamint csúcspontjaiban felvett B_2 esetén a megoldások száma 0, a hiperbolára nézve külső pontokban 2, kivéve az a, a_2 egyeneseket – vagyis a hiperbola csúcsérintőit –, valamint a két csúcs közti szakaszt, ahol 1 háromszög adódik, végül a hiperbola pontjaiban is 1 megoldás van (2. ábra).



2. ábra

Hárs László (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A legutóbbiakban ezt is kaptuk: *azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyeknek egy adott ponttól* (itt A-tól) *és egy adott egyenestől* (itt a_3-tól) *mért távolságainak aránya* $q = 3$, *hiperbola.*

Meg lehet mutatni, hogy ez bármely $q > 1$ arányérték esetén érvényes, $0 < q < 1$ esetén pedig *ellipszis* a mértani hely, továbbá hogy az adott pont minden esetben egyik fókusza lesz a kúpszeletnek, az adott egyenes merőleges a fókuszokat tartalmazó szimmetriatengelyre, a szokásos jelölésekkel $q = c/a$, és az egyenesnek a kúpszelet középpontjától mért távolsága a^2/c.