

Az abszolút érték jelet y és z kifejezésében elhagyhatjuk, hiszen egy számnak és a (-1) -szeresének ugyanazok a számok az osztói. („Szám”-on megoldásunk során csak egész számokat értünk.)

Láttuk,¹ hogy az (1) számnégyesre teljesül

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2,$$

eszerint akkor és csak akkor van 1-nél nagyobb közös osztójuk, ha közülük bármelyik háromnak van. Elég tehát kizárni annak lehetőségét, hogy az (1) közül választott két szám közös osztója egyszersemind a további két szám egyikének is osztója legyen. Könnyű belátni, hogy ennek szükséges feltétele: m , n , p és q -nak ne legyen 1-nél nagyobb r közös osztója, különben r^2 az (1) számok közös osztója lenne. Ez a feltétel azonban nem elegendő, pl. $m = 7$, $n = 4$, $p = 2$, $q = 4$ esetén számaink 60, 40, 45, 85 és közös osztójuk 5 (viszont p és q értékét felcserélve nincs közös osztó).

x és y páros, ezért u -nak páratlannak kell lennie, vagyis m^2 , n^2 , p^2 és q^2 közül egynek vagy háromnak páratlannak kell lennie. Ekkor $m^2 + n^2 = M$ és $p^2 + q^2 = P = u - M$ ellentétes párosságúak. M és P legnagyobb közös osztóját D -vel jelölve ugyanez a legnagyobb közös osztója $z = M - P$ -nek és $u = M + P$ -nek, és ekkor z és u minden közös osztója a D -nek osztója. Eszerint a feladat követelménye akkor és csak akkor teljesül, ha D -nek és pl. x -nek nincs 1-nél nagyobb közös osztója. Mivel D páratlan, elég vizsgálni $x/2$ -t, tehát az

$$m^2 + n^2, \quad p^2 + q^2, \quad mp + nq$$

számoknak nem lehet közös osztója. (Ez magában foglalja azt is, hogy m , n , p , q -nak ne legyen közös osztója.)

Nagy Zsigmond (Budapest, Kaffka M. Gimn.)

¹Az 1085. gyakorlatban, K. M. L. 35 (1967) 66. o.