Egyenleteinket páronként összeadva

$$(x+y)^2 = a+b, \qquad (y+z)^2 = b+c, \qquad (z+x)^2 = c+a.$$

Innen az ismeretlenek páronkénti összegeire két-két érték jön szóba:

$$x+y = \pm\sqrt{a+b}, \qquad y+z = \pm\sqrt{b+c}, \qquad z+x = \pm\sqrt{c+a}, \tag{1}$$

és a három négyzetgyök előtti előjelet bárhogy megválasztva minden egyes esetben egyértelműen és könnyen megoldható elsőfokú egyenletrendszert kapunk. Áttekinthetőség kedvéért az egyes négyzetgyökök előtti 1 vagy -1 szorzót e_1, e_2, e_3-mal jelöljük.

Az (1)-beli egyenletek összegének fele $x+y+z$ értékét adja meg, s ebből az egyes egyenleteket kivonva mindig megkapjuk a harmadik ismeretlent:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}(e_1\sqrt{a+b} - e_2\sqrt{b+c} + e_3\sqrt{c+a}),\\
y &= \frac{1}{2}(e_1\sqrt{a+b} + e_2\sqrt{b+c} - e_3\sqrt{c+a}),\\
z &= \frac{1}{2}(-e_1\sqrt{a+b} + e_2\sqrt{b+c} + e_3\sqrt{c+a}).
\end{aligned}$$

A 3 előjel megválasztása egymástól független, ezért a rendszernek $2^3 = 8$ megoldása lehet. Valóban ennyi a megoldások száma, ha $a+b$, $b+c$, és $c+a$ mindegyike pozitív. Ez a szám mindannyiszor a felére csökken, ahányszor 0 lép fel az összegek között. Ha viszont az összegek között van negatív is, akkor a rendszernek nincs valós megoldása.

Katona VIktor (Heves, Gimn,, IV. o. t.).
Somogyi Kornélia (Ajka, Bródy I. Gimn., III, o. t.)

Megjegyzés. Már az eredeti egyenletekből látható, hogy ha a rendszer egy megoldása $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$, akkor megoldás az $x=-\alpha$, $y=-\beta$, $z=-\gamma$ értékhármas is.