Az alábbiakban közöljük a haladók (II. osztályosok) versenyén kitűzött feladatok megoldását.

Az I. forduló feladatai

I. feladat: *Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott az átfogó c és tudjuk azt, hogy az átfogóhoz tartozó súlyvonal mértani középarányos a két befogó között.*

I. megoldás: Nem megy az általánosság rovására, ha egyszer és mindenkorra feltételezzük, hogy $a > b$. Pythagoras tétele szerint

$$a^2 + b^2 = c^2, \tag{1}$$

feltételünk szerint (mivel a súlyvonal $\frac{c}{2}$)

$$2ab = \frac{c^2}{2} \tag{2}$$

(1) és (2)-t összeadva, ill. kivonva nyerjük

$$(a+b)^2 = \frac{3c^2}{2},$$
$$(a-b)^2 = \frac{c^2}{2},$$

amiből

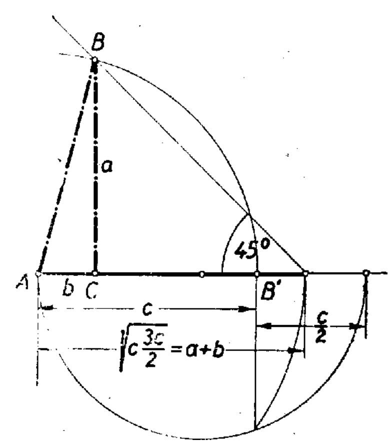
$$a + b = \frac{c\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{6}}{2}, \tag{3}$$

$$a - b = \frac{c\sqrt{2}}{2} \tag{4}$$

A szerkesztés ezek alapján többféleképpen is történhetik.

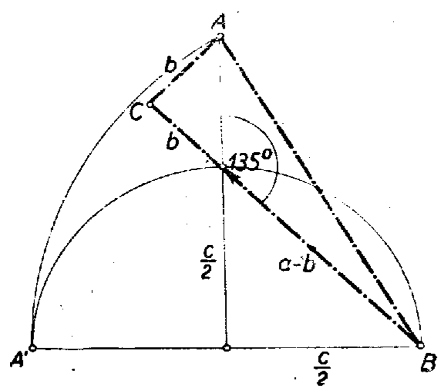
α) (3) és (4) összeadásából nyerjük, hogy $a = \frac{c\sqrt{6} + c\sqrt{2}}{4}$, amely szakasz könnyen szerkeszthető ($c\sqrt{6}$ mértani középarányos $2c$ és $3c$ között, $c\sqrt{2}$ pedig c és $2c$ között). a és c birtokában a keresett háromszög szerkesztése triviális.

β) (3) alapján $a+b$, mint mértani középarányos c és $\frac{3}{2}c$ között megszerkeszthető. Az $a+b$ és c szakaszok birtokában a háromszög szerkesztése a tankönyvből ismeretes (1. ábra).



1. ábra

γ) (4) szerint $a - b$ olyan négyzet átlója, melynek oldala $\frac{c}{2}$. $a - b$ és c birtokában a derékszögű háromszög ismert módon (2. ábra) megszerkeszthető.



2. ábra

Mindhárom esetben könnyen kimutatható, hogy az így megszerkesztett háromszög tényleg eleget tesz követelményünknek. Pl. az utóbbi esetben Pythagoras-tétele alapján

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 2 \cdot \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{2},$$

amiből

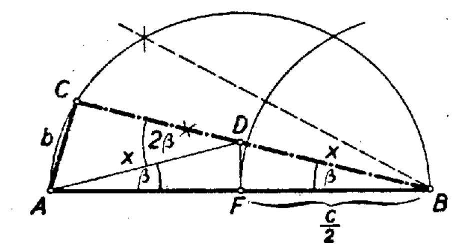
$$2ab = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} = c^2 - \frac{c^2}{2} = \frac{c^2}{2},$$

és így tényleg

$$ab = \frac{c^2}{4}.$$

Oldalak helyett szögeket is kiszámíthatunk, mint azt az alábbi II–V. megoldások mutatják.

II. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak. A betűzést a 3. ábra mutatja.



3. ábra

Jelöljük az AB átfogó felező pontját F-fel, tehát $FA = FB = \frac{c}{2}$. Az F-ben az átfogóra emelt merőleges messe a $BC = a$ befogót D-ben. Legyen $AD = DB = x$.

A szögek egyenlősége miatt

$$ABC\triangle \sim DBF\triangle,$$

és így

$$x : \frac{c}{2} = c : a,$$

amiből

$$x = \frac{c^2}{2a}.$$

De a feltétel szerint

$$c^2 = 4ab,$$

és így

$$x = 2b$$

Az ACD derékszögű háromszögben $\sin CDA\sphericalangle = \sin 2\beta = \frac{b}{x} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$, amiből

$$2\beta = 30^\circ, \quad \text{vagyis} \quad \beta = 15^\circ,$$

mely szög könnyen szerkeszthető.

III. megoldás: A jelöléseket megtartva

$$a = c\sin\alpha, \qquad b = c\cos\alpha.$$

A feltétel szerint

$$ab = c^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{c^2}{4},$$

vagyis, $\frac{2}{c^2}$-tel szorozva

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2},$$

azaz

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2},$$

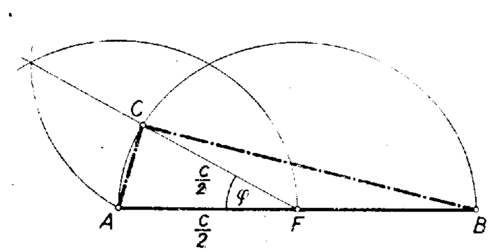
ahonnan $(0 < 2\alpha < 180)$

$$2\alpha = 30^\circ \quad \text{ill.} \quad 150^\circ,$$

$a > b$ miatt

$$\alpha = 75^\circ.$$

IV. megoldás: Az előbbi jelöléseket megtartva jelöljük az $AFC\sphericalangle$-et φ-vel (4. ábra).



4. ábra

Az $AFC\triangle$ területe a fele az $ABC\triangle$ területének. Tehát

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{c}{2}\sin\varphi = \frac{ab}{4},$$

vagyis $c^2\sin\varphi = 2ab$, amiből $\sin\varphi = \frac{2ab}{c^2}$.

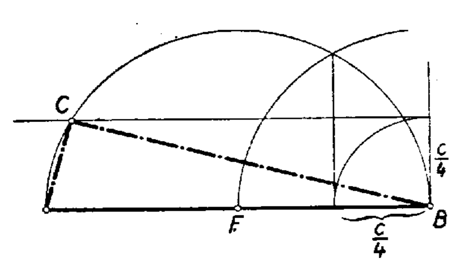
De a feltétel szerint $ab = \frac{c^2}{4}$, vagyis $2ab = \frac{c^2}{2}$, és így $\sin\varphi = \frac{1}{2}$, vagyis $\varphi = 30^\circ$. A C pont megszerkesztése a körülírt körön egyszerűbb már nem lehet.

V. megoldás: A legegyszerűbb megoldáshoz (ha nem is a legegyszerűbb szerkesztéshez) jutunk, ha feltételünket »helyesen« olvassuk.

Feltételünk szerint

$$ab = \frac{c^2}{4} = c\cdot\frac{c}{4}.$$

ab a háromszög kétszeres területe, tehát $c\cdot\frac{c}{4}$ is az, vagyis $\frac{c}{4}$ a háromszögnek az átfogóhoz tartozó magassága. A szerkesztést az 5. ábra mutatja.



5. ábra

Az utóbbi megoldásnál közvetlenül nyilvánvaló, hogy a megszerkesztett háromszög teljesíti a feladatban kirótt feltételt: $ab = c \cdot \dfrac{c}{4} = \dfrac{c^2}{4}$. A II–IV. megoldásnál (ahol tulajdonképpen kiszámítottuk, hogy $\alpha = 75°$ és $\beta = 15°$) a következőképpen igazolhatjuk szerkesztésünk helyességét:

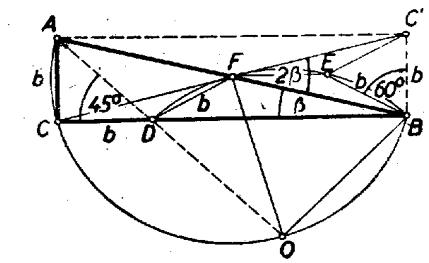
$$a = c\cos 15°, \qquad b = c\sin 15°,$$

és így

$$ab = c^2 \sin 15° \cos 15° = c^2 \frac{\sin 30°}{2} = \frac{c^2}{4}.$$

De anélkül, hogy a háromszög oldalait vagy szögeit kiszámítanánk, is megoldhatjuk feladatunkat, amint azt az alábbi VI–VII. megoldások mutatják.

VI. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak. A betűzést a 6. ábra mutatja.



6. ábra

Szerkesszük meg azt a kört, amely a CF egyenest F-ben érinti és a B csúcsponton is átmegy. Legyen ennek a körnek középpontja O és messe ez a kör a BC befogót másodszor D-ben. Mivel $CF^2 = CB \cdot CD$, vagyis $\left(\dfrac{c}{2}\right)^2 = a \cdot CD$, azért a feladat szerint $CD = b$. Ha kimutatjuk, hogy O rajta van az AB fölé, mint átmérő fölé rajzolt körön és $BO = \dfrac{c}{2}$, továbbá, hogy a D pont rajta van az AO egyenesen, akkor lényegében a II. megoldásban nyert szerkesztéshez jutottunk, de más indokolással.

Mivel BFC egyenlőszárú háromszögből

$$FCD'\sphericalangle = FBD\sphericalangle = \beta,$$

másrészt $CFD\sphericalangle = \beta$, mint az $\widehat{FD}$ ív fölötti húr-érintőszög, azért CDF egyenlő szárú háromszög és

$$FD = CD = b.$$

Az $\widehat{FB}$ ívhez tartozó húr-érintő szög, mint a $BFC\triangle$ külső szög 2β, tehát ez az ív kétszerese az $\widehat{FD}$ ívnek. Az E felezőpontját berajzolva, a húrokra $FE = EB = b$ és $FE \parallel DB$.

Az $ABC\triangle$-et téglalappá egészítve ki FE ennek a középvonalán fekszik. Így $C'E = EB = b$, másrészt $BC' = AC = b$, tehát a BEC' szabályos háromszögből $C'BE\sphericalangle = 60°$, s így

$$EBD\sphericalangle = 2\beta = 30°,$$

Ugyanekkorák az $\widehat{FB}$ íven nyugvó kerületi szögek, és így a középponti szög

$$BOF\sphericalangle = 60° \quad \text{és} \quad BO = FO = BF = \frac{c}{2}$$

a kör sugara. A BOD egyenlőszárú háromszög alapján nyugvó szög

$$DBO\sphericalangle = 60° - \beta = 60° - 15° = 45° = BDO\sphericalangle.$$

Ebből következik, hogy ez a háromszög derékszögű, továbbá A, D és O egy egyenesbe esnek és O (a C-vel együtt) az AB fölötti félkörön van.

Eszerint a szerkesztés menete: az $AB = c$ átmérő fölötti félkört a $BO = \dfrac{c}{2}$ távolsággal elmetszve, majd az AO egyenest az $OD = \dfrac{c}{2}$ távolsággal elmetszve, a BD egyenes metszi ki az AB fölötti félkörből a keresett háromszög C csúcsát.

A szerkesztés igazolása: Mivel az $ABO\triangle$ szögei $30°$, $60°$ és $90°$, azért az O körüli $\dfrac{c}{2}$ sugarú körnek az AB-vel való F metszéspontjára $FOB\triangle$ szabályos, mert $FBO\sphericalangle = 60°$, tehát F felezőpont, $CF = \dfrac{c}{2}$, mint a derékszögű háromszög súlyvonala, továbbá $BFO\sphericalangle = 60°$. BOD egyenlőszárú derékszögű háromszög, tehát $ADC\sphericalangle = DAC\sphericalangle = 45°$, $CD =$

$CA = b$; másrészt az AFC egyenlőszárú háromszögben $CAF\sphericalangle = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$, s így az $AFC\sphericalangle = 30^\circ$. Ebből következik, hogy

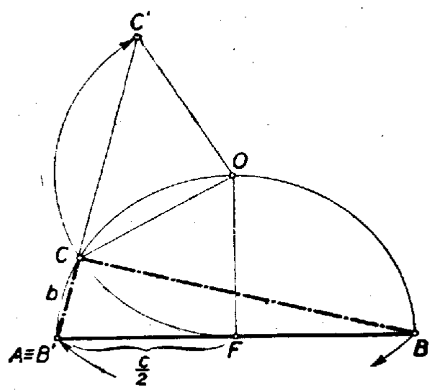
$$CFO\sphericalangle = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ.$$

Így CF érinti az O középpontú kört, s így

$$CF^2 = CD \cdot CB = ba,$$

tehát az $ABC\triangle$ megfelel a kívánalmaknak.

VII. megoldás: Az adott $AB = c$ átfogó fölé rajzolt F középpontú Thales-körben az AB átmérőre merőleges sugár végpontját jelöljük O-val (7. ábra).



7. ábra

O körül $OF = \dfrac{c}{2}$ sugárral rajzolt kör metszi ki a Thales-körből a keresett C pontot. (Ez tulajdonképpen az V. megoldásban nyert szerkesztés, ismét más megindokolással.)

Forgassuk el a $BC = a$ befogót O körül 90°-kal az óra járásával megegyező irányban, akkor a B elforgatása a B' az A pontba kerül, C elforgatása pedig C', és $B'C' \equiv AC' \perp BC$. Mivel AC is merőleges BC-re, azért a C' pont az AC befogó meghosszabbításán fekszik.

A szerkesztés szerint az $AF = \dfrac{c}{2}$ az O körül rajzolt körnek az A pontból húzott érintője, és így

$$AC' \cdot AC = ab = \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

2. feladat: *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

$$(x+y)(x^2+y^2) = a,$$
$$(x-y)(x^2-y^2) = b.$$

I. megoldás: A baloldalakat polinommá alakítva

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = a, \tag{1}$$
$$x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = b \tag{2}$$

egyenletekhez jutunk. Miután mind a két egyenlet harmadfokú és az egyik sem látszik alacsonyabb fokúra redukálhatónak, az egyenletrendszer megoldásánál majd köbgyökvonást kell végeznünk. Arra törekszünk tehát, hogy a változók lehető egyszerű kifejezésének teljes köbét állítsuk elő.

Összeadva (1)-et és (2)-t, továbbá osztva kettővel

$$x^3 + y^3 = \frac{a+b}{2}. \tag{3}$$

A baloldalt $3x^2y + 3xy^2$ egészítené ki $(x+y)$ köbére. Vegyük észre, ha kivonjuk (2)-t, éppen ilyen alakú kifejezéshez jutunk:

$$2x^2y + 2xy^2 = a - b.$$

Mindkét oldalt $\dfrac{3}{2}$-vel szorozva nyerjük

$$3x^2y + 3xy^2 = \frac{3(a-b)}{2} \tag{4}$$

(3) és (4) összege

$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=(x+y)^3=\frac{a+b+3a-3b}{2}=2a-b.$$

Köbgyököt vonva

$$x+y=\sqrt[3]{2a-b}. \tag{5}$$

Másrészt (4)-et így alakíthatjuk át:

$$xy(x+y)=\frac{a-b}{2},$$

melybe $x+y$ (5) alatt nyert értékét behelyettesítve,

$$xy=\frac{a-b}{2\sqrt[3]{2a-b}}. \tag{6}$$

Eszerint x és y a következő másodfokú egyenlet gyökei

$$z^2-\sqrt[3]{2a-b}\cdot z+\frac{a-b}{2\sqrt[3]{2a-b}}=0.$$

Megoldva az egyenletet:

$$z_1=x_1=y_2=\frac{\sqrt[3]{2a-b}+\sqrt{\sqrt[3]{(2a-b)^2}-\dfrac{2(a-b)}{\sqrt[3]{2a-b}}}}{2},$$

$$z_2=x_2=y_1=\frac{\sqrt[3]{2a-b}-\sqrt{\sqrt[3]{(2a-b)^2}-\dfrac{2(a-b)}{\sqrt[3]{2a-b}}}}{2}.$$

II. megoldás: Vezessünk be új változókat. Legyen

$$x+y=u,\quad \text{és}\quad xy=v.$$

Az új változók behelyettesítése céljából átalakítjuk egyenleteinket

$$(x+y)(x^2+y^2)=(x+y)\left[(x+y)^2-2xy\right]=a$$
$$(x-y)(x^2-y^2)=(x-y)^2(x+y)=\left[(x+y)^2-4xy\right](x+y)=b.$$

Elvégezve a behelyettesítést

$$u(u^2-2v)=u^3-2uv=a, \tag{1}$$
$$(u^2-4v)u=u^3-4uv=b. \tag{2}$$

Vonjuk ki (1) kétszereséből (2)-őt

$$u^3=2a-b;\qquad u=\sqrt[3]{2a-b}=x+y \tag{3}$$

(1)-ből kifejezzük v-t u-val, majd behelyettesítjük u-nak (3)-ból nyert értékét

$$v=\frac{u^3-a}{2u}=\frac{a-b}{2\sqrt[3]{2a-b}}=xy. \tag{4}$$

Minthogy (3) és (4) megegyezik az I. megoldás (5) és (6) egyenletével az I. megoldás szerint számolhatunk tovább.

Megjegyzés: Mindkét adott függvény az x és y szimmetrikus kifejezése, amin azt értjük, hogy x és y felcserélésével változatlan marad. Az $u=x+y$ és $v=xy$ kifejezéseket a két változó elemi szimmetrikus kifejezéseinek nevezzük. Bebizonyítható, hogy bármely szimmetrikus kifejezés pusztán a négy alapművelet segítségével kifejezhető az elemi szimmetrikus kifejezésekkel, mégpedig egyértelműen. A II. megoldásban ezt tettük.

3. feladat. *Két szám összege* 173 717. *A két szám* 4*-jegyű különbségének törzstényezői között nincsen egyjegyű szám. Az egyik szám osztható* 1558*-cal. Melyik ez a két szám?*

I. megoldás: Az egyik szám nyilván annyival kisebb az összeg felénél, amennyivel a másik az összeg felénél nagyobb. Mivel a két szám különbsége kisebb, mint 10 000, ezért a keresett számok, ha $\frac{173\,177}{2}=86\,858{,}5$ helyébe m-et írunk, $m-5000$ és $m+5000$, vagyis 81 859 és 91 859 között vannak.

Keressük az első 1558-cal osztható számot a természetes számok sorában 81 858 után. Mivel

$$52 < \frac{81\,858}{1558} < 53$$

azért $1558 \cdot 53 = 82\,574 = m - 4284{,}5$ az első szám, a szóban forgó számközben, mely osztható 1558-cal. Az $m - 4284{,}5$ számnak párja $m + 4284{,}5$ s így a különbség $2 \cdot 4284{,}5 = 8569$. A következő két megfelelő számpár különbsége nyilván $8569 - 2 \cdot 1558 = 5453$, végül az utolsó számpár különbsége $5453 - 3116 = 2337$.

2337-nek és 5453-nak van egyjegyű osztója (3 illetőleg 7), azonban $8569 (= 11 \cdot 19 \cdot 41)$-nek nincs egyjegyű osztója, és így az egyetlen megoldás 82 574 és $82\,574 + 8\,569 = 91\,143$.

II. megoldás: Az összeg és az egyik szám minden közös osztója osztja a másik számot is, és így osztója a két szám különbségének.

Tehát $(173\,717,\ 1558) = 779 = 19 \cdot 41$[1] a két szám különbségének is osztója.

Tehát a különbség $19 \cdot 41 \cdot k$ alakú, ahol k nem tartalmazhat egyjegyű törzstényezőt.

Mivel a feladat szerint $1000 \le 19 \cdot 41 \cdot k \le 9999$, azért

$$\frac{1000}{779} \le k \le \frac{9999}{772} = 12, \ldots,$$

vagyis

$$2 \le k \le 12.$$

Tehát feltételeinknek csak a $k = 11$ érték felel meg, és így a különbség

$$779 \cdot 11 = 8569.$$

Ha a keresett két számot x és y-nal jelöljük, akkor

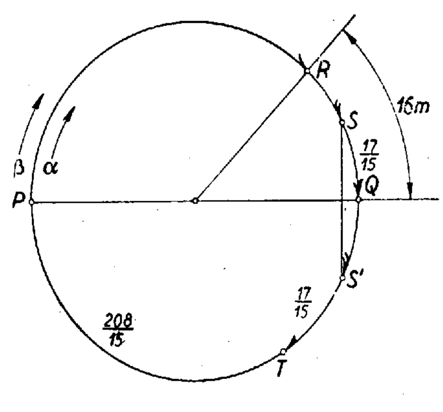
$$\begin{aligned} x + y &= 173\,717, \\ x - y &= 8\,569, \end{aligned}$$

amiből

$$x = 91\,143 (= 3 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 41) \qquad y = 82\,574 (= 2 \cdot 19 \cdot 41 \cdot 53).$$

A II. forduló feladatai

1. feladat: *Két futó α és β versenyt futnak egy körpályán. A táv egy kör, rajt és cél a P pontban. Mikor α eléri a táv felét jelentő Q pontot, β 16 m-rel van mögötte. Egy későbbi időpontban a két futó helyzete tükrös a PQ átmérőre nézve. $1\frac{2}{15}$ másodperccel ezen időpont után β eléri Q pontot és további $13\frac{13}{15}$ másodperc múlva α célba ér. Mekkora a futók sebessége és mekkora a táv? (Feltételezzük, hogy mind a két futó egyenletes sebességgel fut.)*



1. ábra

I. megoldás: Az 1. ábrán a kör belső oldalán α helyzetét, a külsőn ugyanakkor β helyzetét tüntettük fel egyforma fél nyilakkal és köztük a megfelelő futóknak egy-egy ív befutására szükséges idejét.

Válasszuk a befutási időket ismeretlennek: fussa be α a félkört x másodperc alatt, β pedig y másodperc alatt. Mivel egyenletesen futnak, α bármely utat $\frac{x}{y}$-szor annyi idő alatt fut be, mint amennyi alatt β ezt az utat befutja. Az $\widehat{SQ}$ utat β befutotta $\frac{17}{15}$ sec alatt, α tehát $\frac{17}{15}\frac{x}{y}$ sec alatt futja be ezt az utat és a vele egyenlő $\widehat{QS'}$ utat is; ugyanannyi idő alatt β viszont R-ből S-be érkezett.

[1] Ilyenkor a zárójel jelenti a zárójelbe foglalt, vesszővel elválasztott számok legnagyobb közös osztóját.

Nézzük meg, mennyi idő alatt tette meg α a QP második félkört és mennyi alatt β a $\widehat{PQ}$ első félkört. Tudjuk, hogy ezen idő éppen x-szel, ill. y-nal egyenlő. A $\widehat{QS'}$, $\widehat{S'T}$, $\widehat{TP}$ ívek befutására α-nak szükséges időket összeadva

$$x=\frac{17}{15}\frac{x}{y}+\frac{17}{15}+\frac{208}{15}=\frac{17x}{15y}+15. \tag{1}$$

Míg β elért P-ből R-be, addig α a félkört futotta be, tehát ezalatt x sec telt el. Az $\widehat{RS}$ úthoz pedig, amint láttuk, $\frac{17}{15}\frac{x}{y}$ sec kellett, tehát

$$y=x+\frac{17x}{15y}+\frac{17}{15}. \tag{2}$$

(1)-et (2)-ből levonva

$$y-x=x-\frac{208}{15},\quad \text{azaz}\quad 15y=30x-208.$$

$15y$ ezen értékét (1)-be helyettesítve

$$x=\frac{17x}{30x-208}+15,\qquad 30x^2-675x+3120=0.$$

15-tel egyszerűsítve

$$2x^2-45x+208=0,\quad \text{ahonnan}\quad x_1=16,\qquad [x_2=6{,}5].$$

A második gyök negatív y értéket adna, így feladatunk megoldása $x=16$ sec, $y=\frac{272}{15}=18\frac{2}{15}$ sec.

Ezek szerint a 16 m-es $\widehat{RQ}$ út befutására β-nak

$$\frac{17}{15}\frac{x}{y}+\frac{17}{15}=\frac{17}{15}\left(\frac{16\cdot 15}{272}+1\right)=\frac{17}{15}\cdot\frac{32}{17}=\frac{32}{15}\ \text{sec-ra}$$

volt szüksége, tehát sebessége

$$v_\beta=\frac{16\cdot 15}{32}=\frac{15}{2}=7{,}5\ \text{m/sec};$$

α sebessége

$$v_\alpha=v_\beta\frac{y}{x}=\frac{15}{2}\cdot\frac{272}{15\cdot 16}=\frac{15}{2}\cdot\frac{17}{15}=\frac{17}{2}=8{,}5\ \text{m/sec}.$$

A pálya s fél hossza annyiszorosa a 16 méternek, mint y a $\frac{32}{15}$-nek, tehát az egész pálya hossza

$$2s=2\cdot 16\cdot\frac{272}{15}\cdot\frac{15}{32}=272\ \text{m}.$$

II. megoldás: Válasszuk a pálya s félhosszát és az $\widehat{SQ}=\widehat{QS'}=d$ távolságot (méterben mérve) ismeretlennek. Míg α a $\widehat{PS'}=s+d$ utat teszi meg, β befutja a $\widehat{PS}=s-d$ utat, tehát (tekintettel arra, hogy egyenletesen fut a két futó) ugyanazon idő alatt α mindig $\frac{s+d}{s-d}$-szer akkora utat tesz meg, mint β. Így míg β az $\widehat{RS}$ utat teszi meg, α útjára (amely $QS'=d$)

$$\widehat{RS}\frac{s+d}{s-d}=d,\quad \text{tehát}\quad \widehat{RS}=d\frac{s-d}{s+d}$$

adódik. Így

$$\widehat{RS}+\widehat{SQ}=d\frac{s-d}{s+d}+d=16. \tag{1}$$

Másrészt míg β az $\widehat{SQ}=d$ utat futja be, α útja

$$S'T=d\frac{s+d}{s-d},$$

és nyilván

$$\widehat{TP}=\frac{208}{17}\widehat{S'T}=\frac{208d(s+d)}{17(s-d)}.$$

Így

$$\widehat{QP}=s=d+\frac{d(s+d)}{s-d}+\frac{208d(s+d)}{17(s-d)}=d+\frac{225d(s+d)}{17(s-d)}.$$

Ebből az egyenletből meghatározhatjuk az $\dfrac{s}{d}=z$ arányt. d-vel osztva és a törtet d-vel egyszerűsítve

$$z=1+\frac{225(z+1)}{17(z-1)},\qquad 17(z-1)^2=225(z+1)=225(z-1)+450.$$

Innen $z-1=u$-ra

$$17u^2-225u-450=0.$$

Csak a pozitív gyök felel meg a feladatnak, tehát

$$u=15,\quad \frac{s}{d}=u+1=16,\quad s=16d,$$

s ezen értékét (1)-be helyettesítve

$$d\frac{15}{17}+d=\frac{32}{17}d=16,\quad d=\frac{17\cdot 16}{32}=\frac{17}{2}\text{ m}.$$

Így

$$s=16\cdot\frac{17}{2}=136\text{ m},$$

a teljes pálya hossza pedig

$$2s=272\text{ m}.$$

$\dfrac{17}{15}$ sec alatt α az

$$S'T=\frac{d(s+d)}{s-d}=\frac{17}{15}\,d=\frac{17}{15}\cdot\frac{17}{2}$$

utat teszi meg, β pedig d utat. Így sebességük

$$v_\alpha=\frac{17}{2}=8{,}5\text{ m/sec},\qquad v_\beta=\frac{17}{2}:\frac{17}{15}=7{,}5\text{ m/sec}.$$

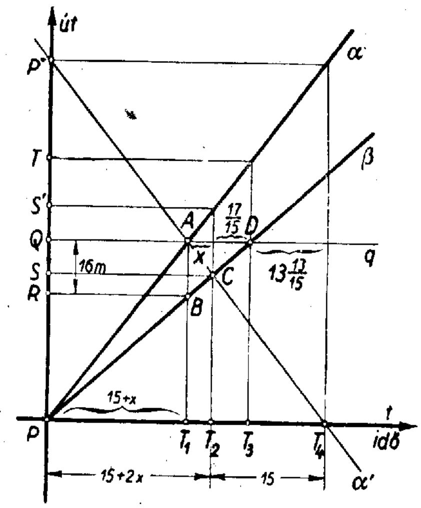
Megjegyzés: Az egyenletrendszert többféle alakban is felírhatjuk, aszerint, hogy milyen mennyiségeket választunk ismeretlennek. Az itt adott megoldások megmutatják, hogy egy a tényeket jól szemléltető vázlat megkímél fölösleges ismeretlenek bevezetésétől és megóv attól a veszélytől, hogy a köztük felállított egyenletek esetleg nem függetlenek egymástól. A versenyzők kivétel nélkül 3–4 ismeretlennel dolgoztak. Kétségtelen, hogy az egyes egyenletek felállítása így egyrészt könnyebb, de másrészt könnyen előfordulhat – és több versenyzővel meg is esett – hogy a feladat valamelyik állítását kétféleképpen írjuk fel egyenlet alakjában, míg egy másik állítást figyelmen kívül hagyunk. Ez esetben is megegyezik az ismeretlenek száma az egyenletek számával, de az utóbbiak nem függetlenek egymástól, és így a végén határozatlan egyenlethez jutunk, végtelen sok megoldással. Ilyen esetben az első gondolatunk az legyen, hogy talán nem minden feltételt használtunk fel.

A másodfokú egyenletrendszer megoldása bizonyos ügyességet kíván, mert a helyettesítésekkel könnyen magasabbfokú egyenletre juthatunk. Ez nem következik be abban az esetben, ha az egyik ismeretlent első fokú egyenletből fejezzük ki és a nyert elsőfokú kifejezést helyettesítjük be a másodfokú egyenletbe. Gyakorlati okokból jó, ha első pillanatra lényegtelennek látszó körülményeket sem hagyunk figyelmen kívül. Példánkban v_α-ra, v_β-ra és d-re eleve kisebb számértéket várunk, mint s-re. Ezért, ha módunkban van, az ismeretlenek közül legelőször s-et küszöböljük ki, mert ha végül v_α-ra, v_β-ra vagy d-re nyerünk egy másodfokú egyenletet, ez bizonyára egyszerűbb alakú lesz, mintha s kiszámítására nyerünk egyenletet és így sok numerikus számítást takaríthatunk meg. Sok versenyző saját kárán jöhetett rá, hogy érdemes átgondolni ilyen mellékesnek látszó körülményeket is.

III. megoldás: A mozgási feladatokat előnyösen oldhatjuk meg grafikus úton. A vízszintes tengelyre az időt, a függőlegesre a megtett utat mérjük rá. Az út és idő összetartozó értékeit pontokkal ábrázoljuk; e pontok összessége a mozgás grafikonja. Az egyenletes mozgás grafikonja egyenes vonal. Az idő-tengellyel bezárt szögének tangense a mozgó test sebességét adja meg.

Példánkban az út-tengelyre a pályát kiegyenesítve rakjuk rá, kezdőpontja és a végpontja egyaránt P (utóbbit a 2. ábrán P^*-gal jelöltük), a táv felezési pontja Q. A távot és a mozgások sebességét nem ismerjük, ezért csak vázlatszerű grafikont tudunk készíteni, amelyről az ismeretlenek számértékét nem fogjuk tudni közvetlenül leolvasni, de könnyű lesz azokat kiszámítani a vázlatszerű grafikonról is leolvasható egyszerű összefüggésekből.

α mozgását a P pontból kiinduló ugyancsak α-val jelölt egyenessel ábrázoljuk; β sebessége kisebb, ezért a mozgását az α-nál kevésbé meredek β egyenes ábrázolja (2. ábra).



2. ábra

T_1 időpontban, mikorra α megtette a táv felét. β hátrább van 16 m-rel, melyet függőlegesen bejelöltünk: $AB = 16$ m. A tükrös helyzet időpontja T_2, amikor β helyzetét a C pont jellemzi. A C pontot α tükörképe az α' egyenes metszi ki a β egyenesből.

β a táv felét T_3 időpontban éri el. Ennek a helyzetnek a grafikonon a D pont felel meg, amelyben a β egyenes metszi a Q-n átmenő, t idő-tengellyel párhuzamos q egyenest.

α célbaérésének időpontját T_4-gyel jelöltük. Ez a pont az időtengelyen a P kezdőponttól kétszer akkora távolságra van, mint T_1 és az α' egyenes keresztül megy T_4-en.

Az időkülönbségeket a q középvonalon tüntettük fel: $T_2 - T_1$-et x-szel jelöltük, a feladatból ismert $T_3 - T_2 = \dfrac{17}{15}$, $T_4 - T_3 = 13\dfrac{13}{15}$, $T_4 - T_2 = 15$, $T_1 - 0 = T_4 - T_1 = 15 + x$.

A t és a vele párhuzamos q egyenes metszi a C ponton átmenő egyeneseket. Tekintsük a metszéspontokat megfelelő pontoknak és a megfelelő pontok által határolt egyenes szakaszokat megfelelő szakaszoknak. (Tehát A-nak megfelel T_4 pont, D-nek megfelel P; az AD szakasznak megfelel a T_4P szakasz.) A megfelelő szakaszok aránya egyenlő, tehát

$$x : 15 = \frac{17}{15} : (15 + 2x), \quad \text{átalakítva} \quad 2x^2 + 15x - 17 = 0.$$

Ennek az egyenletnek egyik gyöke $x = 1$, a másik negatív, tehát a feladat szerint értelmetlen.

Ezután x segítségével az ismeretleneket az ábrából tüstént kifejezhetjük és kiszámíthatjuk.

β sebességét v_β-t (a β egyenes emelkedési szögének tangensét) az ADB derékszögű háromszögből határozhatjuk meg:

$$v_\beta = \frac{16}{x + \dfrac{17}{15}} = \frac{16}{1 + \dfrac{17}{15}} = \frac{240}{32} = 7{,}5 \text{ m/sec.}$$

A PDT_3 derékszögű háromszögből a táv fele:

$$s = DT_3 = PT_3 \cdot v_\beta = \left(15 + 2x + \frac{17}{15}\right) \cdot 7{,}5 = 136 \text{ m.}$$

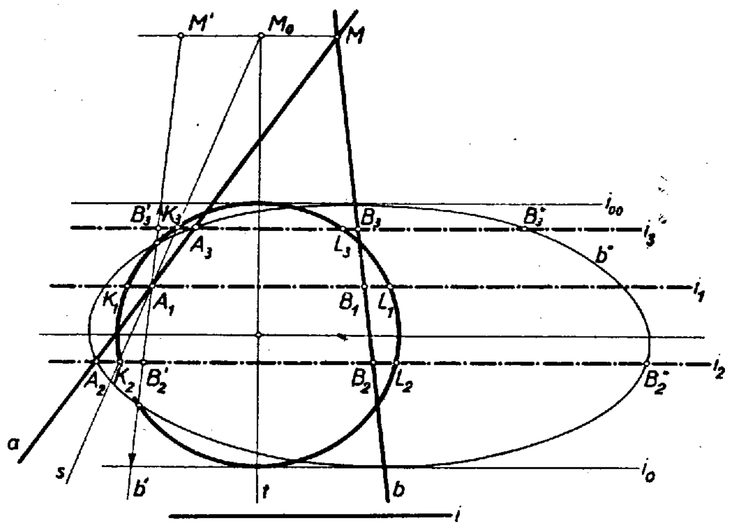
Végül a PAT_1 derékszögű háromszögből, α sebessége:

$$v_\alpha = \frac{AT_1}{PT_1} = \frac{s}{15 + x} = \frac{136}{16} = 8{,}5 \text{ m/sec.}$$

Feladatunkat ezzel megoldottuk és a hosszúság-egység és idő-egység megválasztása után a két mozgást grafikusan, léptékhelyesen is ábrázolhatjuk.

2. feladat: *Adva van egy kör, továbbá 3 egyenes a, b, i melyek közül a és b metszi a kört. Szerkesszünk i-vel párhuzamos oly egyeneseket, amelyek a másik két egyenest és a kört úgy metszik, hogy az egyik kör metszésponttól az egyik egyenesig terjedő szakasz egyenlő a másik körmetszésponttól a másik egyenesig terjedő szakasszal.*

Megoldás: A kör minden pontjából húzzunk az i egyenessel párhuzamos egyenest, messe ez b-t a B pontban, a kört pedig másodszor az L pontban. L-ből mérjük rá a KL egyenesre mindkét irányban a KB távolságot. A keletkező mértani helynek az a egyenessel való metszéspontjaiban i-vel párhuzamosan húzott egyenesek adják a feladat megoldásait.



3. ábra

Jelöljük az i-vel párhuzamos körérintőket i_0- és i_{00}-val, a b-nek a i irányra merőleges t körátmérőre vonatkozó tükörképét b'-vel.

Ha KB-vel *ellentétes* irányú LB' távolságokat mérünk fel (lásd az ábrán az i_2 és i_3 egyeneseken a B_2' ill. B_3' pontokat), akkor, ha a K végigfut a körön a B' pontok kétszer futják be a b'-n ennek i_0 és i_{00} közti szakaszát. (Az ábrán a két végpontot nyíllal jelöltük.) Ennek a szakasznak az a egyenessel való A_1 metszéspontján át – ha van ilyen – az i-vel párhuzamosan húzott i_1 egyenes szolgáltatja a feladat egyik megoldását. (Nevezhetjük »tükrös megoldás«-nak, mert $K_1A_1 = L_1B$ egymásnak tükörképei t-re nézve.)

A mértani hely másik részét megkapjuk, ha az i-vel párhuzamos egyenesekre a KB szakaszokkal *egyirányú* LB^* távolságokat mérünk. Ha K befutja a teljes kört (tehát a K és L pontok felcserélődnek) a B^* pontok zárt görbét futnak be, mely görbéből minden i_0 és i_{00} közti párhuzamoson 2–2 pont fekszik. Ennek a görbének az a egyenessel lehetséges metszéspontjait (A_2 A_3) kellene megszerkeszteni. Erre azonban a talált mértani hely már nem alkalmas. Hasznát vehetjük azonban itt is a b' egyenesnek.

Tegyük fel, hogy az A_2-n átmenő i_2 megoldás már meg van szerkesztve; ennek metszéspontja a körrel K_2 és L_2, a b és b' egyenesekkel és B_2 és B_2', végül $K_2A_2 = L_2B_2$ és e távolságok egyirányúak. Mivel b' szerkesztése szerint $L_2B_2 = K_2B_2'$, azért $K_2A_2 = K_2B_2'$ és e távolságok már ellentétes irányúak, azaz K_2 az A_2B_2' szakasz felezőpontja. Így a K_2 és hasonlóképpen a K_3 is, rajta van azon a vonalon, melyet az i_0 és i_{00} közti i-vel párhuzamos egyenesek a és b' közé eső szakaszainak felezőpontjai alkotnak. Tudjuk azonban, hogy ilyen szakaszt bárhol megrajzolva, a keletkező háromszögnek s súlyvonalán vannak az összes felezőpontok, tehát a súlyvonalnak az i_0 és i_{00} közé eső szakaszán lesz az újabb mértani hely, melynek közös pontjai a körrel adják a K_2-t és K_3-at. (Ha a és b metszéspontja M a rajz keretén belül van, akkor az MM' szakasz felezőpontja M_0 nyilván a t tengelyen van és az A_1M_0 egyenes az $A_1MM'\triangle$ keresett s súlyvonala.) A K_2 és K_3 pontokon át i-vel húzott párhuzamosak i_2 és i_3 megoldások, amelyeken $K_2A_2 = L_2B_2$ ill. $K_3A_3 = L_3B_3$ egyirányúak. Ilyen fajta (nem tükrös) megoldások száma 2, 1 (2 egybeeső), ill. 0 aszerint, amint s két különböző pontban metszi a kört, érinti a kört, vagy nem metszi a kört.

Az összes megoldások száma tehát 3, 2, 1 vagy 0.

Megjegyzés: A b^* görbe úgy keletkezett az adott körből, hogy azt a b' egyenestől mindkét oldalon egy adott i irányban kétszeresre nyújtottuk. Ha speciálisan az egyenes átmérő és az irány erre merőleges (a nyújtás vagy zsugorítás pedig tetszés szerinti arányú), akkor a III. osztály tananyagában szerepel annak bizonyítása, hogy a körből így keletkező görbe ellipszis. A IV. reálosztályosok az ábrázoló-geometriai órákról azt is tudják, hogy tetszőleges egyenes, tetszőleges irányú és tetszőleges arányú nyújtás (vagy zsugorítás) esetén *is*, a kör ellipszisbe megy át, és a kör- és ellipszis-rendszer közötti geometriai rokonságot »affinitás«-nak hívjuk. A IV. reálosztályosok még azt is tudják, hogy pl. a tengelyeivel megadott ellipszisnek egy egyenessel való metszéspontjait úgy szerkeszthetjük meg, hogy az ellipszist affin vonatkozásba hozzuk egy körrel, az ellipszis-rendszerben megadott egyenesnek megszerkesztjük az affin megfelelőjét a körrendszerben, ez utóbbinak a körrel való metszéspontjait visszavisszük az ellipszis-rendszerbe. Jelen esetben tulajdonképpen az ellipszis-rendszerben megadott $a \equiv s^*$ egyenesnek megszerkesztettük a körrendszerbe a megfelelőjét s-et, $1:2$ arányú zsugorítással.

Figyeljük végül meg, hogy az i_1 megoldáson egyszerre fennáll $K_1A_1 = L_1B_1$ és $K_1B_1 = L_1A_1$. Ez is és az a tény is, hogy míg K befutja a kört, B' kétszer halad végig a b' szóbajövő szakaszán (a mértani helynek ez a része egyenes szakasszá fajuló ellipszisnek tekinthető), vagyis az A_1 pont, mint e mértani helynek és az a egyenesnek metszéspontja, kétszeresen számít, azt mutatja, hogy tulajdonképpen az i_1 megoldás is kétszeresen számít.

3. feladat: *Az*

$$x^2 + 2xy + 5y^2 - 6xz - 22yz + 16z$$

kifejezést alakítsuk át egy háromtagú, egy kéttagú és egy egytagú kifejezés teljes négyzetének algebrai összegére.

Megoldás: A keresett kéttagú kifejezésben az egyik változó nem fordulhat elő. Határozzuk meg a háromtagú kifejezést úgy, hogy négyzetét levonva az adott kifejezésből, a különbség már csak két változót tartalmazzon, pl. ne tartalmazza x-et. Ezt úgy érhetjük el, hogy az adott kifejezést x szerint rendezzük.

$$F(x,\, y,\, z) = x^2 + 2x(y - 3z) + (5y^2 - 22yz + 16z^2). \tag{1}$$

Ezután az első két, x-et tartalmazó, tagot teljes négyzetté egészítjük ki

$$x^2 + 2(y - 3z) = [x + (y - 3z)]^2 - (y - 3z)^2.$$

Ezt (1)-be helyettesítve és összevonva

$$F(x,\, y,\, z) = (x + y - 3z)^2 - 4y^2 - 16yz + 7z^2. \tag{2}$$

Most az y-os tagokat egészítsük ki teljes négyzetté.

$$4y^2 - 16yz = (2y - 4z)^2 - 16z^2.$$

Ezt (2)-be helyettesítve

$$\begin{aligned} F(x,\, y,\, z) &= (x + y - 3z)^2 + (2y - 4z)^2 - 16z^2 = \\ &= (x + y - 3z)^2 + (2y - 4z)^2 - (3z)^2. \end{aligned}$$

Megjegyzés: A bemutatott eljárással bármely háromváltozós polinom, melynek minden tagja csak egy változó négyzetét vagy csak két változó szorzatát tartalmazza, átalakítható egy háromtagú, egy kéttagú és egy egytagú polinom teljes négyzetének algebrai összegévé. Az átalakítás azonban általában irracionális együtthatókat hozhat be, még ha az eredeti kifejezés együtthatói racionális vagy éppen egész számok voltak is. Természetesen előfordulhat, hogy az egyes kifejezésekben egyes tagok hiányoznak (együtthatójuk 0), esetleg a 3 négyzetes kifejezés közül valamelyik teljesen hiányozhat.

Végül megemlítjük azt is, hogy a négyzetösszeggé alakítás másképpen is lehetséges. pl. a fenti kifejezésre igazolható az

$$F(x,\, y,\, z) = \left(\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}y - 4z\right)^2 - \left(\frac{17}{4\sqrt{41}}x + \frac{\sqrt{41}}{4}y\right)^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{41}}x\right)^2$$

átalakítás helyessége is és sok másé.