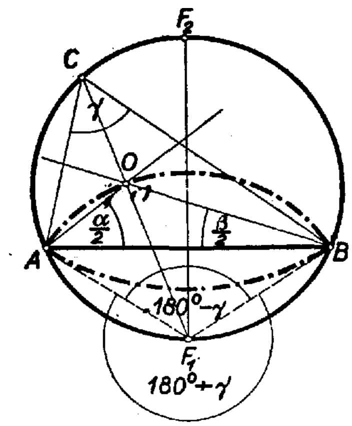
Alábbiakban közöljük a kezdők (I. osztály) versenyén kitűzött feladatok megoldásait.

Az I. forduló feladatai

1. feladat. *Egy háromszög két csúcsát a kör kerületén rögzítjük, a harmadik csúcs végigfut a körön. Mi a háromszögbe írható körök középpontjának mértani helye?*

I. megoldás: Legyen A és B a két rögzített pont, F_1 és F_2 az AB húrra merőleges átmérőnek végpontjai és C a harmadik csúcs, mely egyelőre mozogjon az AF_2B köríven (1. ábra).



1. ábra

A kerületi szögek tétele alapján az $ACB\sphericalangle = \gamma$ szög állandó. A beírt kör O középpontja a szögfelezők metszéspontja, így az

$$AOB\triangle-\text{ből az } AOB\sphericalangle = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ-\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2},$$

vagyis az O pontból az AB húr az állandó $90^\circ + \dfrac{\gamma}{2}$ szög alatt látszik. Tehát az O pontok mértani helyének egy része az AB húrhoz tartozó, $90 + \dfrac{\gamma}{2}$ szögnek megfelelő látókörív. E látókörív középpontja az AB húrra merőleges F_1F_2 egyenesnek az a pontja, amelyben az ugyanazon íven nyugvó középponti szög $2\left(90+\dfrac{\gamma}{2}\right) = 180^\circ+\gamma$, vagyis amelyből az AB húr $360^\circ-(180^\circ+\gamma) = 180^\circ-\gamma$ szög alatt látszik; ez a pont pedig az F_1 pont, mert az $ACBF_1$ húrnégyszögben az $AF_1B\sphericalangle = 180^\circ-\gamma$, mint a γ szöggel szembenfekvő szög.

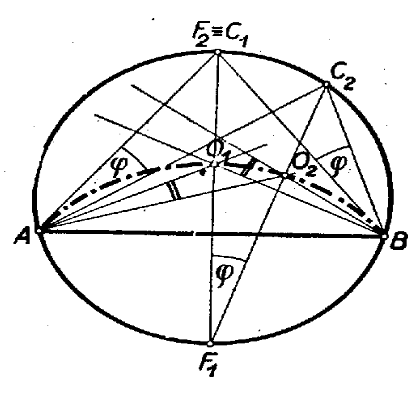
Ugyanúgy kimutatható, hogy ha a C pont a BF_1A íven mozog, akkor az O pont leírja az F_2 középpontú BA ívet. Tehát a feltételeket kielégítő O pontok szükségképpen az F_1 és F_2 középpontú, a kör belsejében fekvő, AB köríveken fekszenek. Meg kell még mutatnunk, hogy – fordítva – e köríveknek minden pontja eleget tesz a követelményeknek. Az $AOB\sphericalangle = 90^\circ + \dfrac{\gamma}{2}$ szög AO, ill. BO szárára tükrözzük az AB egyenest (1. ábra). A tükörképek az AB egyenessel, annak az F_2-t tartalmazó oldalán $2\cdot OAB\sphericalangle$ és $2\cdot OBA\sphericalangle$ nagyságú szögeket zárnak be. E két szög összege

$$2(OAB\sphericalangle + OBA\sphericalangle) = 2\left[180^\circ - \left(90^\circ+\frac{\gamma}{2}\right)\right] = 180^\circ - \gamma$$

tompaszög, tehát ezek az egyenesek metszik egymást az AB határolta, F_2-t tartalmazó félsíkban és γ nagyságú szöget zárnak be. Ezek szerint C metszéspontjuk rajta van az AF_2B köríven és O, mint két szögfelező metszéspontja, az $ABC\triangle$ beírt körének középpontja, tehát megvan a mértani helyet definiáló tulajdonsága.

Most már kimondhatjuk, hogy a keresett mértani hely: az F_1 és F_2 középpontú, a kör belsejében fekvő, $\widehat{AB}$ körívek.

II. megoldás: Ha $C_1 \equiv F_2$, akkor az $AC_1B\triangle$-be írt kör középpontja legyen O_1 (2. ábra).



2. ábra

Az AF_2B körív egy tetszőleges C_2 pontjához tartozó $ABC_2\triangle$ beírt körének középpontja, vagyis szögfelezőinek metszéspontja legyen O_2. A változó C csúcspontból kiinduló szögfelező, a kerületi szögek tétele alapján, mindenkor átmegy az F_1 ponton

$$C_1AC_2\sphericalangle = C_1F_1C_2\sphericalangle = C_1BC_2\sphericalangle = \varphi,$$

mint ugyanazon a köríven $(\widehat{C_1C_2})$ nyugvó kerületi szögek.

Ebből következik, hogy ha a háromszög f_c szögfelezője F_1 körül φ szöggel elfordul, akkor

1. az a és b oldal is φ szöggel fordul el és következésképpen
2. a másik két szögfelező $\frac{\varphi}{2}$ szöggel (az ábrán kétszeres ívvel jelölve) fordul el.

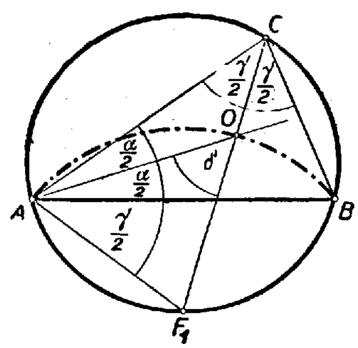
Tehát

$$O_1AO_2\sphericalangle = O_1BO_2\sphericalangle = \frac{\varphi}{2}.$$

Mivel a kerületi szögek tétele megfordítható, ez azt jelenti, hogy az O_1 és O_2 pontok rajta vannak azon az $\widehat{AB}$ köríven, melynek az O_1O_2 ívhez tartozó középponti szöge $2\cdot\frac{\varphi}{2}=\varphi$, és maga a középpont pedig rajta van az AB húrt merőlegesen felező F_1F_2 egyenesen. Mivel – mint láttuk – éppen $O_1F_1O_2\sphericalangle = \varphi$, azért az O pontokat tartalmazó $\widehat{AB}$ körív középpontja F_1. A fenti bizonyítás megfordításával kimutatható, hogy a szóbanforgó körív minden pontja eleget tesz feltételeinknek.

Ugyanígy végezhető a bizonyítás az AF_1B körívre nézve.

III. megoldás: $F_1AB\sphericalangle = F_1CB\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$, mint kerületi szögek (3. ábra).



3. ábra

Az $AOC\triangle$ O-nál fekvő külső szöge δ egyenlő a két belső szög összegével, vagyis $\delta = \frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}$, amiből következik, hogy az $AOF_1\triangle$ egyenlő szárú, tehát

$$F_1O = F_1A.$$

Ugyanígy végezhető a szükségesség e bizonyítása az $\widehat{AF_1B}$ köríven fekvő C pontokhoz tartozó O pontokra nézve is. E bizonyítások megfordításból következik, hogy a szükséges feltétel elégséges is, és ezzel bebizonyítottuk, hogy az O pontok mértani helye az F_1, és F_2 középpontú, A (és B) ponton átmenő köröknek, az adott kör belsejébe eső ívei.

2. feladat. *Bizonyítsuk be, hogyha négy egymásután következő természetes szám szorzatához* 1*-et adunk, négyzetszámot kapunk.*

I. megoldás: Legyenek a számok: a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, ahol $a\geq 1$.

Feladatunk tehát az

$$a(a+1)(a+2)(a+3)+1$$

kifejezést polinommá alakítani és arról kimutatni, hogy ez egy másik polinom négyzete.

$$(a^2+a)(a^2+5a+6)+1 = a^4+6a^3+11a^2+6a+1.$$

Ez a polinom csak olyan háromtagú polinom négyzeteként keletkezhetett, amelynek első tagja a^2 és harmadik tagja 1. A középső tagját, x-et, meg kell határozni.

$$(a^2+x+1)^2 = a^4+2a^2x+x^2+2a^2+2x+1.$$

A nyert kifejezést összehasonlítva polinomunkkal nyerjük, hogy $x=3a$ esetén a két polinom tagról-tagra megegyezik, tehát

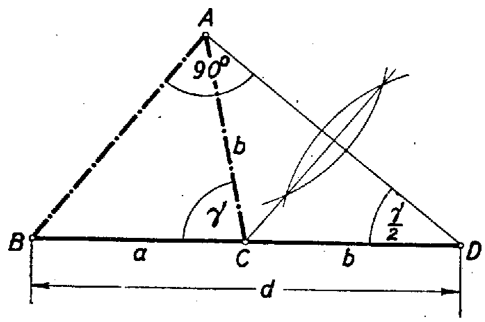
$$a(a+1)(a+2)(a+3)+1 = (a^2+3a+1)^2.$$

II. megoldás: Ügyesebb a szorzatot úgy csoportosítani, hogy az első és utolsó, továbbá a két középső tényezőt szorozzuk össze:

$$a(a+1)(a+2)(a+3)+1=(a^2+3a)(a^2+3a+2)+1=$$
$$=(a^2+3a)^2+2(a^2+3a)+1=(a^2+3a+1)^2.$$

3. feladat. *Adva van egy háromszög két oldalának összege és a két oldal bezárta szög. Szerkesszük meg a háromszöget úgy, hogy a harmadik oldal a lehető legkisebb legyen.*

I. megoldás: Legyen adva a $d=a+b$ távolság és a γ szög. Képzeljük a feladatot megoldottnak (1. ábra).



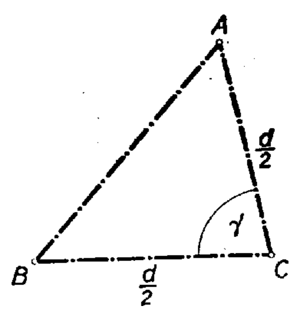
1. ábra

Ha az $a=BC$ oldalt C-n túl b-vel meghosszabbítjuk: $CD=b$ és így $BD=a+b=d$.

Az ADC egyenlőszárú háromszögnek a C csúcsnál fekvő külső szöge γ, és így az $ADB\sphericalangle=\frac{\gamma}{2}$.

A szerkesztés kiindulása tehát: Az adott $d=BD$ távolság D végpontjában felmérjük az adott γ szög felét. Az így nyert száron lesz rajta az A pont. A $c=AB$ oldal pedig akkor lesz minimális, ha $BA\perp AD$. A szerkesztés következő lépése tehát: a B-ből a $\frac{\gamma}{2}$ szög megszerkesztett szárára bocsátott merőleges metszi ki az utóbbiból a keresett A csúcspontot. A szerkesztés befejező része: az AD szakaszt merőlegesen felező egyenes, amely fentiek szerint párhuzamos AB-vel, metszi ki BD-ből a C csúcspontot, amely e szerint felezőpontja a BD-nek, vagyis $a=b$.

II. megoldás: Az előbbiek alapján a legegyszerűbb szerkesztés a következő: a C csúcspontú γ szög száraira rámérjük a $\frac{d}{2}=CA=CB$ távolságot (2. ábra).



2. ábra

A II. forduló feladatai

1. feladat. *Legyen*

(1) $$a+b+c=0,$$

(2) $$A+B+C=0,$$

(3) $$\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}=0$$

Mennyi az

$$aA^2+bB^2+cC^2$$

kifejezés értéke?

I. megoldás: Jelöljük a keresett kifejezés értékét X-szel. Mivel (2) alapján $A=-(B+C)$, $B=-(A+C)$ és $C=-(A+B)$, azért

$$\begin{aligned} X = aA^2+bB^2+cC^2 &= -\left[aA(B+C)+bB(A+C)+cC(A+B)\right] = \\ &= -aAB-aAC-bBA-bBC-cCA-cCB = \\ &= -AB(a+b)-BC(b+c)-CA(c+a). \end{aligned}$$

De (1)-ből $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$, és így a keresett

$$X = ABc+aBC+AbC = ABC\left(\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}\right).$$

A zárójelben lévő kifejezés értéke (3) alapján 0, tehát

$$X=0.$$

II. megoldás: Kiindulhatunk az (1)-ből, amely szerint $a=-(b+c)$, $b=-(a+c)$ és $c=-(a+b)$. Tehát

$$\begin{aligned} X = aA^2+bB^2-cC^2 &= -(b+c)A^2-(a+c)B^2-(a+b)C^2 = \\ &= -a(B^2+C^2)-b(A^2+C^2)-c(A^2+B^2) = \\ &= -a(B+C)^2-b(A+C)^2-c(A+B)^2+2aBC+2bAC+2cAB. \end{aligned}$$

De (3)-ból ABC-vel szorozva (A, B és C nem lehet 0),

$$aBC+bAC+cAB=0,$$

(2)-ből

$$(B+C)^2=A^2, \quad (A+C)^2=B^2, \quad (A+B)^2=C^2,$$

és így

$$X=-aA^2-bB^2-cC^2=-X,$$

amiből

$$X=0.$$

III. megoldás: $(A+B+C)(aA+bB+cC)=0$, mert az első tényező (2) alapján 0. A baloldalt átalakítva és az (1) alatti egyenletet figyelembe véve

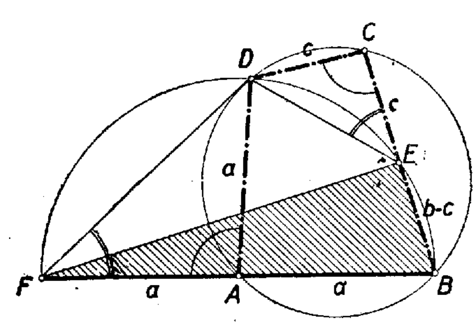
$$\begin{aligned} aA^2+bB^2+cC^2+AB(a+b)+BC(b+c)+CA(c+a) &= \\ = X-ABc-BCa-CAb &= 0. \end{aligned}$$

(3) alapján a baloldal utolsó három tagjának összege 0 (lásd II. megoldást) és így

$$X=0.$$

2. feladat. *Szerkesszünk húrnégyszöget az oldalaiból, ha két szomszédos oldala egyenlő.*

I. megoldás: Adva van az $ABCD$ húrnégyszögnek $AB=AD=a$, $BC=b$ és $CD=c$ oldala. Képzeljük a feladatot megoldottnak (1. ábra).

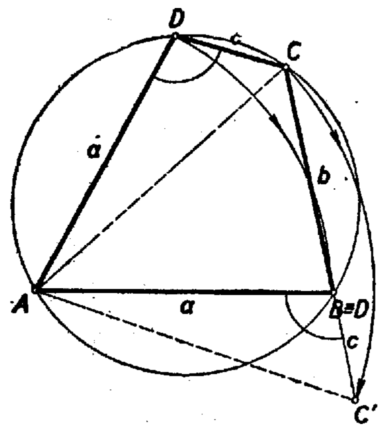


1. ábra

Az A körül $AB = AD = a$ sugárral rajzolt kör kimetszi a BC oldalból, vagy annak meghosszabbításából az E pontot, az AB oldal meghosszabbításából az F pontot. Ismeretes, hogy a húrnégyszögnek bármely szöge egyenlő a szemközti szög mellékszögével. Eszerint tehát a C-nél fekvő egy íves szög egyenlő az A-nál fekvő egy íves szöggel és az $FBED$ húrnégyszögben az F-nél fekvő két íves szög egyenlő a E-nél fekvő két íves szöggel. Ebből következik, hogy a DAF és DCE háromszögek 2–2 szöge egyenlő, vagyis e két háromszög hasonló. De $AD = AF = a$, és így $CD = CE = c$, vagyis $BE = b - c$. Thales tétele értelmében $BEF\sphericalangle = 90°$.

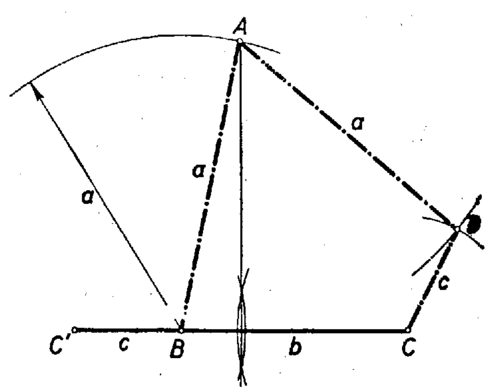
Az $FB = 2a$ átfogóból és $BE = b - c$ befogóból a BEF derékszögű háromszög (az 1. ábrán srafozva) egyszerűen megszerkeszthető, feltéve, hogy $2a > b - c$. A BEF derékszögű háromszög birtokában az A, C és D pontok megszerkesztése már nem okoz nehézséget.

II. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak. A jelöléseket megtartva, forgassuk az $ADC\triangle$-et A pont körül úgy, hogy a D pont D' elforgatása B-be kerüljön (2. ábra).



2. ábra

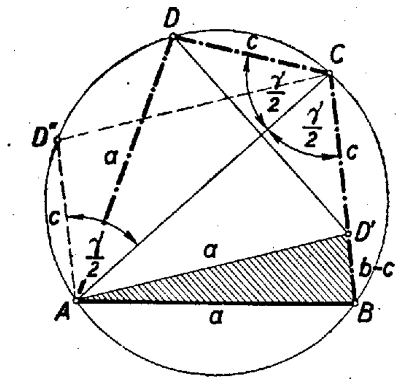
Mivel húrnégyszögünk egy íves $D\sphericalangle$-e egyenlő a szemközti $B\sphericalangle$ egy ívvel jelzett mellékszögével, azért a C pont elforgatása, C' a CB oldal meghosszabbítására kerül. Mivel $AC = AC'$, azért az A pont egyrészt rajta van a CC' távolságot merőlegesen felező egyenesen, másrészt pedig a B középpontú a sugarú körön. A szerkesztést a 3. ábra mutatja.



3. ábra

Megoldás van, ha $a > \dfrac{b-c}{2}$, vagyis $2a > b - c$.

III. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldva és használjuk az eddigi jelöléseket. Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy $b > c$ (4. ábra).



4. ábra

$AB = AD$, tehát a fölöttük levő C-t nem tartalmazó körívek is egyenlők. Így a kerületi szögek tétele alapján a CA átló felezi a C-nél fekvő γ szöget, tehát a D pontnak az AC átlóra vonatkozó tükörképe D' ráesik a b oldalra és $BD' = b - c$. (D' tehát azonos az I. megoldásban szerepelt E ponttal). Az ABD' egyenlőszárú háromszög (a 4. ábrán srafozva) az a és $b - c$ szakaszokból könnyen megszerkeszthető. (E háromszögnek a keresett húrnégyszöggé való kiegészítése már triviális.)

Lényegében ugyanennek a háromszögnek megszerkesztésére vezet, ha D-nek megszerkesztjük az AC átlót merőlegesen felező egyenesre vonatkozó D'' tükörképét (4. ábra). Mivel a $CAD''\sphericalangle$ a tükrözés folytán $\frac{\gamma}{2}$, azért a váltószögek törvénye alapján $AD'' \parallel BC$, vagyis $BCD''A$ egyenlőszárú trapéz, amely az adatokból (a szár, $b \parallel c$) szerkeszthető. A szerkeszthetőség feltétele, hogy $2a > b - c$.

3. feladat. *Három természetes számról a következőket tudjuk:*
a) *mind a három szám különböző;*
b) *összegük* 406*;*
c) *legnagyobb közös osztójuk* 2*-nél nagyobb törzsszám (jelöljük* p*-vel)*
d) *ha az egyes számokat elosztjuk* p*-vel ismét* 3 *törzsszámot kapunk (legyenek ezek* p_1*,* p_2*,* p_3*).*
Melyek ezek a számok? Megjegyezzük, hogy 1 *nem törzsszám.*

Megoldás: A feladat szerint

$$pp_1 + pp_2 + pp_3 = I(p_1 + p_2 + p_3) = 406 = 2 \cdot 7 \cdot 29,$$

ahol

$$p > 2, \text{ és } 1 < p_1 < p_2 < p_3.$$

Tehát $p = 7$, vagy $p = 29$.
Ha $p = 7$, akkor $p_1 + p_2 + p_3 = 2 \cdot 29 = 58$.
3 törzsszám összege csak úgy lehet páros, ha egyikük (nyilván a legkisebbik) közülük 2.
Tehát $p_1 = 2$, és így

$$p_2 + p_3 = 56.$$

Ezt az egyenlőséget csak a következő három törzsszámpár egyenlíti ki:

$$3 + 53, \quad 13 + 43 \quad \text{és} \quad 19 + 37.$$

Ha $p = 29$, akkor $p_1 + p_2 + p_3 = 2 \cdot 7 = 14$. Mivel szükségképpen most is $p_1 = 2$, azért

$$p_2 + p_3 = 12,$$

mely esetben csak az $5 + 7$ törzsszámpár felel meg.
Tehát összesen 4 megoldás van:

$$14, \ 21, 371;$$
$$14, \ 91, 301;$$
$$14, 133, 259;$$
$$58, 145, 203.$$

A haladók versenyén kitűzött feladatok megoldását a jövő számunkban közöljük.