A II. (döntő) fordulóban, mely április 20-án folyt le, 123 iskola tanulói 287 dolgozatot adtak be. Öt órai munkaidő állott rendelkezésre az alábbi három feladat megoldására:

1. Egy háromszög egyik szöge $\alpha = 43°$. Határozzuk meg a háromszög szögeit, ha a háromszög t területére fennáll a

$$2t = ab\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

összefüggés.

2. Egy osztály tanulói között diót osztottak szét. Az első tanuló kapott a számú diót és még a megmaradó diók 30-ad részét; a második tanuló $2a$ diót és a még megmaradó diók 30-ad részét; a harmadik tanuló $3a$ diót és a még megmaradó diók 30-ad részét és így tovább. Bizonyítsuk be, hogy ha az első két tanuló egyenlő számú diót kapott, akkor valamennyien ugyanannyi diót kaptak. Mekkora ez esetben az osztály létszáma?

3. Legyenek valamely hegyesszögű háromszög M magasságpontjának az oldalakra vonatkozó tükörképei rendre M_1,M_2,M_3. Bizonyítsuk be, hogy az $M_1M_2M_3$ háromszög és az adott háromszög oldalainak metszéspontjaiból alkotott konvex hatszög szemközti csúcsait összekötő átlók az M ponton mennek át.

A Központi Versenybizottság május 20-án a következő jelentést fogadta el:

» A Bizottság megállapítja, hogy a verseny több szempontból igen sikeresnek bizonyult.

A feladatok kiválasztása szerencsésnek mondható. Mindegyik bőven adott alkalmat többletmunkára. Főleg a 3. feladat nyújtott sokféle igen ötletes és szellemes megoldásra lehetőséget, amellyel a versenyzők éltek is. A legnehezebbnek bizonyult 2. feladatot is sokan megoldották. Szép számmal vannak olyanok, akik *csak* az 1. illetőleg *csak* a 3. feladattal *nem* tudtak megbirkózni, ezzel szemben sokan vannak. akik viszont csak az 1., vagy csak a 3. feladatot oldották meg. Ez mutatja, hogy bár a feladatok nem voltak túl nehezek, mégis mindegyik megoldása jó készséget igényelt.

Ennek megfelelően a beadott dolgozatok általános értéke is felülmúlja az előző két verseny eredményét. Ebben a feladatok megválasztásán túl komoly része van annak is, hogy haladás észlelhető a versenyzők tudásában és fogalmazásában. Főleg örvendetes, hogy egyre több versenyző akad, aki általánosítások, többféle megoldások megadása, vagy egyéb megjegyzések által igyekszik teljesítményét fokozni.

Természetesen, azért még sok tipikus hiba akad. Az 1. feladatban még sokan feleslegesen logaritmussal, illetőleg szögfüggvények értékének behelyettesítésével dolgoztak, a 2. feladatban sokan csak az utolsó kérdésre feleltek és a feladat lényegéről, a bizonyításról egyáltalán megfeledkeztek, illetőleg egyszerű indukcióval próbáltak bizonyítani teljes indukció helyett. Szép számmal voltak olyanok akik a 3. feladatban a bizonyítandóval egyenértékű állításból indultak ki, vagy bizonyítás közben használtak fel ilyen állítást. Elég gyakran találunk még homályos vagy kevés szövegezést, illetőleg zavaros bőbeszédűséget.

Mindhárom feladatot kifogástalanul megoldotta és azonfelül értékes többletmunkát teljesített 13 tanuló. Ezek közül is elsősorban Vigassy József emelkedik ki, akinek mindhárom megoldása egyszerű és rövid, továbbá az 1. feladathoz fűzött megjegyzése, valamint a 2. feladat általánosításán felül a 3. feladathoz ad egy II. megoldást, amely a legeredetibb és legszebb a versenyen, és általánosítja a 3. feladatot tompaszögű háromszögre. A Bizottság javasolja, hogy az 1. díjat Vigassy József-nek ítéljék oda.

Bártfai Pál és Tomor Benedek dolgozatai már elmaradnak e dolgozat mögött. Utóbbinak teljesítménye mennyiségileg ugyan azonos az első díjra javasolt dolgozatéval, de a 3. feladat II. megoldása elég szürke, míg előbbiében hiányzik a 3. feladat említett általánosítása, de a 3. feladathoz olyan II. és III. megoldásokat tartalmaz, melyek ha nem is vetekszenek Vigassy fent említett megoldásával, mégis értékesek. Megemlítendő még Tomor Benedek szabatos fogalmazása. A Bizottság javasolja, hogy Bártfai Pál és Tomor Benedek egy-egy 2. díjban részesüljön.

Az első csoportba tartozó további 10 dolgozat szerzőit (amely dolgozatok legjobbjai nagyon megközelítik a 2. díjasokét) I. dicséretre ajánlja. II. dicséretre a Bizottság 17 versenyzőt ajánl, akik mindhárom feladatot lényegében megoldották, vagy ezzel egyenértékű teljesítményt nyújtottak. Két feladat megoldásán felül többletteljesítményt ért el 22 versenyző, két feladatot helyesen oldott meg, vagy ezzel egyenértékű teljesítményt nyújtott 18 versenyző. A Bizottság az előbbieket III., az utóbbiakat IV. dicséretre javasolja. Végül a szakérettségis tanulók közül elért jó eredményéért könyvjutalomra javasolja Kovács Istvánt.«

Az O. M. a Központi Bizottság javaslata alapján a következő döntést hozta:

1. díj (oklevél és 1000,- Ft. pénzjutalom):
Vigassy József (Bp. I., Petőfi g. IV. o. t)

2. díj (oklevél és 500,- Ft. pénzjutalom):
Bártfai Pál (Bp. I., Petőfi g. III. o. t.);
Tomor Benedek (Győr, Révai Miklós g. IV. o.t.)

I. dicséretben és nagyobb könyvjutalomban részesült:
Balatoni Ferenc (Bp. III., Árpád g. IV. o. t.),
Beleznay Ferenc (Bp. VIII., Piarista g. III. o. t.),
Marik Miklós (Bp. II., Fürst g. IV. o. t.),
Papp Zoltán (Sárospatak, Rákóczi g. IV. o. t.),
Pátkai György (Bp. IX , Fáy A. g. III. o. t.).
Quittner Pál (Bp. I., Petőfi g. III. o. t.),

Reichlin-M. Viktor (Bp. VIII., Piarista g. IV. o. t.),
Siklósi Péter (Sopron, Széchenyi g. IV. o. t.),
Solymoss Otmár (Kőszeg, Jurisich M. g. IV. o. t.),
Zawadowski Alfréd (Bp. I., Petőfi g. IV. o. t.).

II. dicséretet és könyvjutalmat nyert:

Bauer András (Bp. II., Rákóczi g. III. o.t.), *Biczó Géza* (Bp. II., Rákóczi g. III. o. t.), *Csanády Mihály* (Esztergom, I. István g. IV. o. t.), *Eördögh László* (Bp. VIII., Apáczai Csere g. IV. o.t.), *Fábián Egon* (Bp. XI., József A. g. IV. o. t.), *Jámbor Imre* (Zalaegerszeg, Zrínyi M. g. IV. o. t.), *Kása István* (Bp. IX., Fáy g. III. o. t.), *Kovács László* (Debrecen, Ref. g. IV. o. t.), *Lábos Elemér* (Sátoraljaújhely, Kossuth g. III. o. t.), *Lackner Györgyi* (Bp. V., Fonóip. techn. III. o. t.), *Lőw Miklós* (Bp. VIII., Vörösmarty g. IV. o. t.), *Molnár István* (Debrecen, Ref. g. IV. o. t.), *Németh Lehel* (Jászberény, Mikszáth g. IV. o. t.), *Sélley Gábor* (Bp. X., I. László g. IV. o. t.), *Schmidt Eligius* (Bp. I., Fürst g. IV. o. t.), *Tarlacz László* (Szombathely, Nagy Lajos g. III. o.t.), *Uray László* (Bp. VIII., Piarista g. III. o.t.).

III. dícséretben és könyvjutalomban részesült:

Alexander Gábor (Bp. XIV., I. István g. IV. o. t.), *Bagi András* (Bp. VIII., Apáczai Csere g. IV. o. t.), *Bódás Péter* (Székesfehérvár, József A. g. IV. o.t.), *Burger Péter* (Bp. VII., Madách g. IV. o. t.), *Csernyák László* (Kaposvár, Táncsics g. IV. o. t.), *Csemniczky János* (Vác, Gépészeti techn. IV. o. t.), *Ehrenfeld János* (Bp. VIII., Erőműgép. techn. IV. o. t.), *Gergely Péter* (Bp. VIII., Apáczai Csere g. IV. o.t.), *Gömöry Pál* (Bp. I., Fürst g. IV. o. t.), *Grätzer György* (Bp. VI., Kölcsey g. IV. o. t.), *Kertész Ádám* (Bp. I., Fürst g. III. o. t.), *Masszi György* (Pécs, Janus Pannonius g. IV. o. t.). *Radda György* (Pannonhalma, Bencés g. IV. o. t.), *Rippel Géza* (Bp. VIII., Vörösmarty g. IV. o. t.), *Sántha Ernő* (Bp. IX., Fáy g. III. o. t.), *Szabó Endre* (Gyöngyös, Vak Bottyán g. III. o. t), *Szlanka Imre* (Aszód, Petőfi g. III. o. t.), *Tolnai Tibor* (Szombathely, Nagy Lajos g. III. o. t.), *Tóth Dezső* (Vác, Sztáron g. IV. o. t.), *Varga János* (Keszthely, Vajda J. g. IV. o. t.), *Vértes Péter* (Bp. Eötvös g. III. o. t.), *Zarka Sándor* (Bp. IX., Fáy g. III. o. t.).

IV. dicséretben és könyvjutalomban részesült:

Balogh György (Székesfehérvár, Magasép. techn. III. o. t.), *Bárdos András* (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.), *Beczner Kálmán* (Bp. VIII., Vörösmarty g. IV. o.t.), *Bonyhárd Péter* (Bp. VIII., Apáczai Csere g. III. o. t.), *Brunner György* (Bp. V., Eötvös g. IV. o. t.), *Doroszlai Pál* (Bp. I., Petőfi g. III. o. t.), *Gaál István* (Csorna, Latinka g. IV. o. t.), *Gelencsér Piroska* (Bp. VIII., Zrínyi Ig. III. o. t.), *Jónás József* (Gyöngyös, Vak Bottyán g. III. o.t.), *Kézdy Pál* (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.), *Kirz János* (Bp. VIII., Apáczai Csere g. III. o. t.), *Lőcs Gyula* (Bp. V., Eötvös g. IV. o. t.), *Pasitka Bálint* (Szeged, Vegyip. techn. III. o. t.), *Pejtsik Árpád* (Bp. VIII., Vörösmarty g. IV. o. t.), *Rédei András* (Bp. IX., Fáy g. III. o. t.), *Roboz Ágnes* (Bp. VI., Varga Katalin lg. III. o. t.), *Szentai Endre* (Bp. VI., Kölcsey g. III. o. t.), *Szepesszentgyörgyi Oszkár* (Sátoraljaújhely, Kossuth g. III. o. t.).

Könyvjutalomban részesült:

Kovács István (Kecskemét, Ságvári E. szakéretts. tanfolyam.)

A teljesítmények összehasonlítására szerkesztőségünk célszerűnek látja az 1. és 2. díjat 6, ill. 5 ponttal, a négyféle dicséretet pedig rendre 4, 3, 2 és 1 ponttal számítani. (Hangsúlyozzuk, hogy hivatalosan semmiféle pontozás nincs!) Így összesen $6+2\cdot 5+10\cdot 4+17\cdot 3+22\cdot 2+18\cdot 1=169$ pont került kiosztásra. A verseny végeredményét megyék és iskolafajok szerint az 4. oldalon közölt táblázat mutatja.

Örömmel állapítjuk meg, hogy a 70 kitüntetésben részesült versenyző közül 53-an (75,6%) lapunk feladatmegoldói. Az első 30 helyezett közül 28-an munkatársai lapunknak, akik közül 23-nak az arcképét is közölte a K. M. L. (Részletes beszámoló – sokféle szempontból –, a »Köznevelés« augusztus 15-i számában, a 279 – 280. oldalon található.)

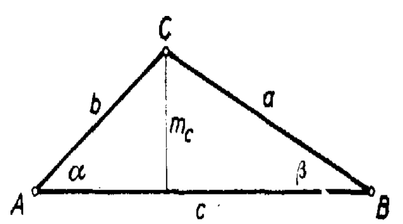
Kimutatás az 1954. évi Rákosi Mátyás matematikai verseny II. fordulójáról megyék és iskolafajok szerint

Megyék és Budapest	Beadott dolg. száma		Kitüntetésben részesültek								Pontszám (nem hivatalos)					
					Díj		Dicséret				gimn.		ip. t.		Összesen	
	isk.	tan.	isk.	tan.	1	2	I	II	III	IV	isk.	pont	isk.	pont	isk.	pont
Baranya	*5*	7	*1*	1	–	–	–	–	1	–	*1*	2	–	–	*1*	2
Bács-Kiskun[1]	*6*	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Békés	*1*	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Borsod	*9*	11	*2*	3	–	–	1	1	–	1	*2*	8	–	–	*2*	8
Csongrád	*4*	6	*1*	1	–	–	–	–	–	1	–	–	*1*	1	*1*	1
Fejér	*4*	6	*2*	2	–	–	–	–	1	1	*1*	2	*1*	1	*2*	3
Győr-Sopron	*6*	22	*4*	4	–	1	1	–	1	1	*4*	12	–	–	*4*	12
Hajdú-Bihar	*7*	17	*1*	2	–	–	–	2	–	–	*1*	6	–	–	*1*	6
Heves	*3*	8	*1*	2	–	–	–	–	1	1	*1*	3	–	–	*1*	3
Komárom	*4*	5	*1*	1	–	–	–	1	–	–	*1*	3	–	–	*1*	3
Nógrád	*3*	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Pest	*4*	5	*3*	3	–	–	–	–	3	–	*2*	4	*1*	2	*3*	6
Somogy	*2*	3	*1*	1	–	–	–	–	1	–	*1*	2	–	–	*1*	2
Szabolcs-Szatmár	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Szolnok	*6*	11	*1*	1	–	–	–	1	–	–	*1*	3	–	–	*1*	3
Tolna	*4*	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Vas	*5*	7	*2*	3	–	–	1	1	1	–	*2*	9	–	–	*2*	9
Veszprém	*6*	11	*1*	1	–	–	–	–	1	–	*1*	2	–	–	*1*	2
Zala	*2*	2	*1*	1	–	–	–	1	–	–	*1*	3	–	–	*1*	3
Vidék	*81*	147	*22*	26	–	1	3	7	10	5	*19*	59	*3*	4	*22*	63
Budapest	*42*	140	*18*	44	1	1	7	10	12	13	*16*	101	*2*	5	*18*	106
Összesen	*123*	287	*40*	70	1	2	10	17	22	18	*35*	160	*5*	9	*40*	169

Alább közöljük a II. forduló feladatainak megoldását.

1. feladat.

A megoldás lényege annak észrevétele volt, hogy a feltételi egyenletből következik, hogy a γ szög értéke $120°$. Ehhez lényegében két úton juthatunk: vagy a szögeket küszöböljük ki távolságok segítségével és azután felhasználjunk a háromszög alkotórészei közötti összefüggéseket, vagy az adott összefüggést goniometriai összefüggéssé igyekszünk alakítani és goniometriai átalakításokat végzünk. Az előbbi út pl. a következő módon követhető.



I. megoldás: A betűzést az ábra mutatja. Helyettesítsük be az adott összefüggésbe a $\sin\alpha = \frac{m_c}{b}$, $\sin\beta = \frac{m_c}{a}$, $2t = cm_e$ kifejezéseket és emeljünk négyzetre. Mivel mindkét oldalon pozitív mennyiség áll, az eredetivel ekvivalens összefüggéshez jutunk

$$c^2 m_c^2 = a^2 b^2 \left(\frac{m_c^2}{a^2} + \frac{m_c^2}{b^2} + \frac{m_c^2}{ab}\right) = (a^2 + b^2 + ab) m_c^2.$$

[1] 1 szakérettségis tanuló könyvjutalomban részesült.

Innen, mivel m_c nem lehet 0 ($\alpha = 43°$ folytán a háromszög nem lapulhat egyenes szakasszá),

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab. \tag{1}$$

Másrészt a cosinus-tétel szerint

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\,\cos\gamma$$

A két kifejezést összehasonlítva $\cos\gamma = -\dfrac{1}{2}$, tehát $\gamma < 180°$ miatt $\gamma = 120°$ lehet csak és ebben az esetben (1), s így az eredeti összefüggés is valóban teljesül. Ez esetben $\alpha + \beta = 60°$, tehát a háromszög szögei $\alpha = 43°$, $\beta = 17°$, $\gamma = 120°$.

II. megoldás: Felhasználva a terület meghatározására szolgáló $2t = ab\sin\gamma$ összefüggést, a 0-tól különböző ab-értékkel osztva és négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin\alpha\sin\beta, \tag{2}$$

vagy

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma + \sin\alpha\sin\beta = 0.$$

Alakítsuk át először a középső különbséget, szögfüggvények összegének és különbségének szorzatalakját használva [ehelyett a $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$ kifejezés tagokra bontásával is célhoz érhetnénk]

$$\begin{aligned}\sin^2\beta - \sin^2\gamma &= (\sin\beta + \sin\gamma)(\sin\beta - \sin\gamma) = \\ &= 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2} = \\ &= 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot 2\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \\ &= \sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma) = \sin\alpha\sin(\beta-\gamma).\end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma + \sin\alpha\sin\beta &= \sin\alpha\big[\sin\alpha + \sin(\beta-\gamma)\big] + \sin\alpha\sin\beta = \\ &= 2\sin\alpha\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2} + \sin\alpha\sin\beta = \\ &= 2\sin\alpha\sin\frac{180° - 2\gamma}{2}\cos\frac{180° - 2\beta}{2} + \sin\alpha\sin\beta = \\ &= 2\sin\alpha\sin(90° - \gamma)\cdot\cos(90° - \beta) + \sin\alpha\sin\beta = \\ &= 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\beta = 2\sin\alpha\sin\beta\left(\cos\gamma + \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

E szorzat csak úgy lehet 0, ha $\cos\gamma = -\dfrac{1}{2}$, azaz $\gamma = 120°$.

Megjegyzések: 1. A II. megoldásban a lapunk 560. feladalaban (VIII. köt. 82. old.) szereplő

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma,\ \text{ ha } \alpha + \beta + \gamma = 180° \tag{3}$$

azonosságot bizonyítottuk be és alkalmaztuk. Többen fel is használták készen ezt az azonosságot a megoldáshoz.

2. Néhányan a (2) összefüggésből jutottak (1)-hez, felhasználva a sinustételt az $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = \lambda$ alakban, vagy pontosabban az $a = 2r\sin\alpha$ stb. összefüggéseket, ahol r a háromszög köré írt kör sugara. Ugyanezen az úton a cosinus-tétel is goniometriai összefüggéssé alakítható, éppen a (3) azonossággá, és (2)-vel összehasonlítva adja a kívánt eredményt.

2. feladat.

I. megoldás: Legyen a szétosztandó diók száma d, ekkor az első tanuló

$$a + \frac{d-a}{30} = \frac{d}{30} + \frac{29}{30}a$$

diót kap, a másodiknak jutó diók mennyisége pedig

$$2a + \frac{d - \frac{d}{30} - \frac{29}{30}a - 2a}{30} = \frac{29}{30^2}d + \left(2\frac{29}{30} - \frac{29}{30^2}\right)a = \frac{29}{30^2}d + \frac{29\cdot 59}{30^2}a.$$

Ha tehát az első két tanuló ugyanannyi diót kapott, akkor

$$\frac{d}{30}+\frac{29}{30}a=\frac{29}{30^2}d+\frac{29\cdot 59}{30^2}a,\quad \text{azaz } \frac{d}{30^2}=\frac{29^2}{30^2}a,\quad d=29^2a,$$

és az első két tanuló egyenként

$$a+\frac{d-a}{30}=a+\frac{(29^2-1)a}{30}=a+\frac{28\cdot 30}{30}a=29a$$

diót kapott. Teljes indukcióval bizonyitjuk, hogy a többinek is ugyanennyi dió jut. Legyen $k>2$ és tegyük fel, hogy már az első $k-1$ tanulóról beláttuk, hogy nekik egyenként $29a$ dió jutott. Ekkor maradt meg $d-(k-1)29a=29(30-k)a$ dió, így a k-adik tanulónak

$$ka+\frac{29(30-k)a-ka}{30}=\frac{30ka+29\cdot 30a-29ka-ka}{30}=29a$$

dió jut. Így valóban sorban minden diák $29a$ diót kap. Ennek folytán $29a^2$ számú dióból 29 diáknak tudunk adni, tehát 29-en vannak az osztályban.

Megjegyzés: Szó szerint ugyanilyen meggondolással látható, hogy ha nem 30-ad részét, hanem tetszésszerinti b-ed részét ($b>1$) vesszük mindig a maradéknak, akkor $d^2=(b-1)^2a$ számú diónak kell kezdetben lennie ahhoz, hogy az első és a második diáknak ugyanannyi dió jusson, ekkor mindegyiküknek, és velük együtt a további diákoknak is $(b-1)a$ dió jut, egészen a $(b-1)$-edikig, aki megkapja az összes még meglévő diót. A feladat további általánosítása lesz leolvasható a következő megoldásból.

II. megoldás: Legyen a kiosztandó diók száma d, kapjon a k-adik tanuló ka diót és még a maradék b-ed részét, a k-adik tanulónak jusson ilyen módon c^k dió és legyen a visszamaradó diók száma d_k, jelentse d_0 a d-t. Ekkor

(1) $$d_{k-1}=c_k+d_k \qquad k=1,2,\ldots.$$

és

$$c_1=a+\frac{d-a}{b}=\frac{b}{d}+\frac{b-1}{b}a,\quad c_2=2a+\frac{d_1-2a}{b}=\frac{d_1}{b}-2\frac{b-1}{b}a,$$

általában

(2) $$c_k=ka+\frac{d_{k-1}-ka}{b}=\frac{d_{k=1}}{b}+k\frac{b-1}{b}a \qquad k=1,2,\ldots$$

Vizsgáljuk két egymásutáni tanulónak jutó mennyiség különbségét, használjuk rá a $D_k=c_{k+1}-c_k$ jelölést:

$$D_k=\frac{d_k-d_{k-1}}{b}+\frac{b-1}{b}a=\frac{b-1}{b}a-\frac{c_k}{b}$$

(1) szerint, s igy két szomszédos különbség különbségében már a nem fog szerepelni:

$$D_{k+1}-D_k=-\frac{c_{k+1}-c_k}{b}=-\frac{D_k}{b},\ \text{azaz } D_{k+1}=\frac{b-1}{b}D_k.$$

Azt nyertük tehát, hogy a D_k különbségek mértani sorozatot alkotnak. Ennek hányadosa $\frac{b-1}{b}>0$, mert $b>1$. Eszerint az egymásutáni diákoknak jutó diómenynyiség vagy állandóan csökken, vagy állandóan növekszik, vagy mindannyian egyenlő számú diót kapnak.

A feladat állítása tehát így általánositható: ha van két diák, akik egyenlő mennyiségű diót kaptak, akkor mindenkinek ugyanannyi dió jutott.

Hogy a három eshetőség közül melyik következik be, az D_1 előjelétől, illetve 0 voltától függ. Mivel

$$D_1=\frac{b-1}{b}a-\frac{c_1}{b}=\frac{(b-1)b}{b^2}a-\frac{d}{b^2}-\frac{b-1}{b^2}a=\frac{(b-1)^2}{b^2}a-\frac{d}{b^2}=$$
$$=\frac{(b-1)^2a-d}{b^2}$$

tehát az egymásutáni diómennyiségek aszerint nőnek, csökkennek, vagy lesznek egyenlők, amint

$$d<(b-1)^2a,\quad \text{vagy}\quad d>(b-1)^2a,\quad \text{vagy}\quad d=(b-1)^2a.$$

A k-adik tanulónak

$$c_k=c_1+D_1+D_2+\ldots+D_{k-1}=$$

$$= \frac{d}{b} + \frac{b-1}{b}a + D_1\left[1 + \frac{b-1}{b} + \ldots + \left(\frac{b-1}{b}\right)^{k-2}\right] =$$

$$= \frac{d}{b} + \frac{b-1}{b}a + \frac{(b-1)^2a - d}{b^2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{b-1}{b}\right)^{k-1}}{\frac{1}{b}} =$$

$$= \frac{d}{b} + \frac{b-1}{b}a + \frac{(b-1)^2a - d}{b} - \frac{(b-1)^2a - d}{b} \cdot \left(\frac{b-1}{b}\right)^{k-1}$$

azaz

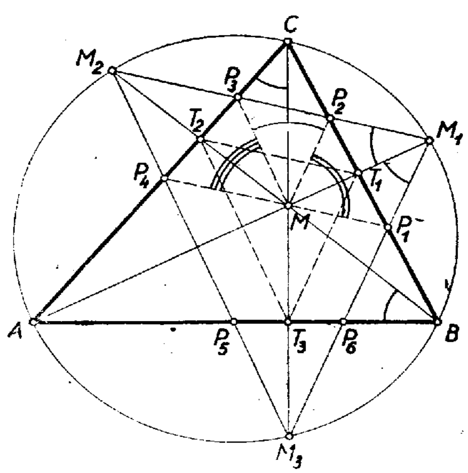
$$c_k = \frac{b - 1 + b^2 - 2b + 1}{b}a - \frac{(b-1)^2a - d}{b}\left(\frac{b-1}{b}\right)^k \frac{b}{b-1} =$$

$$= (b-1)a - \frac{(b-1)^2a - d}{b-1} \cdot \left(\frac{b-1}{b}\right)^k.$$

dió jut az általános esetben egészen azon n-edik tanulóig, akinek a részét kiadva már $(n+1)a$ diónál kevesebb marad vissza. Ennek feltételéül az általános esetben meglehetősen áttekinthetetlen egyenlőtlenség adódik.

3. feladat.

I. megoldás: A betűzést az 1.ábra mutatja.



1. ábra

Először egy *segédtételt* bizonyítunk be. Ismert tétel alapján (Gallai-Péter I. oszt.tankönyv 1953 – 302. old.) az M_1, M_2, M_3 pontok rajta vannak az ABC_Δ köré írt körön. Mint merőlegesszárú szögek a B-nél levő egyíves szög egyenlő a C-nél levő egyíves szöggel, vagyis a kerületi szögek tétele alapján $\widehat{M_2A} = \widehat{AM_3}$ és így az M_1A *egyenes felezi az* $M_1M_2M_{3\Delta}$, $M_1\sphericalangle$-ét. *Ugyanez áll az* M_2B és M_3C *egyenesekre is az* $M_2\sphericalangle$, *illetőleg* $M_3\sphericalangle$-*ge1 kapcsolatban.*

Ennek felhasználásával a feladat állítása így bizonyítható: Kössük össze az M pontot a keletkezett hatszög P_1, P_2, P_3 és P_4 csúcspontjaival. Az $MP_1M_1P_2$ négyszögben a P_1P_2 átló a tükrözés miatt felezi a P_1 és P_2 csúcspontoknál levő szögeket. Tehát a szóban forgó négyszögben a két átló egymásra merőleges és a segédtétel alapján *mindkét* átló egyúttal szögfelező, amiből következik, hogy az $MP_1M_1P_2$ négyszög rombusz, és így $P_1M \parallel M_1P_2$. Hasonlóképpen az $MP_4M_2P_3$ rombuszban $P_4M \parallel M_2P_3$.

De az M_1P_2 és M_2P_3 szakaszok rajta vannak azM_1M_2 egyenesen, amellyel a P_1M és P_4M szakaszok külön-külön párhuzamosak. A két utóbbi szakasznak egy közős pontja M, és így P_1, M és P_4 egy egyenesen vannak, vagyis a P_1P_4 átló átmegy az M ponton. Ugyanígy bizonyítható ez a P_2P_5, ill. P_3P_6 átlóra is.

Megjegyzés: Igen sok versenyző – a segédtétel nélkül – az átlók merőlegességéből és csak egyedül a P_1P_2 átló szögfelező voltából már rombuszra következtetett, megfeledkezvén a deltoidról.

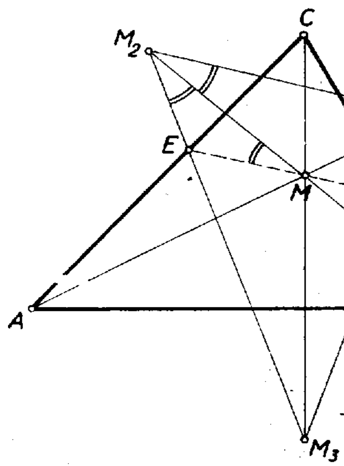
II. megoldás: Segédtételünkhöz a háromszög köré írt kör nélkül is eljuthatunk. Ugyanis, ha az adott ABC_Δ-nek $T_1T_2T_3$ talpponti háromszögét tekintjük (1. ábra), akkor nyilván az $M_1M_2M_{3\Delta}$ a talpponti háromszögnek $2:1$ arányú nagyítása az M hasonlósági centrumból. Elég most már arra az ismert tételre hivatkozni (Gallai-Péter I. oszt. Tankönyv 1953 – 287-288. old.), hogy a háromszög magasságvonalai a talpponti háromszög szögfelezői.

Lényegében ezzel azonos bizonyítás: az M_1, M_2 és M_3 pontokon át a BC, CA, ill. AB oldalakkal húzott párhuzamos egyenesek által alkotott $A_1B_1C_{1\Delta}$-ben alkalmazzuk a talpponti háromszögre vonatkozó idézett tételt.

III. megoldás: Segédtételünk alapján $P_2T_1 = T_1P_1$, $P_3T_2 = T_2P_4$, $M_1T_1 = T_1M$ (1. ábra). Az M_1, P_2 és P_3 pontok az M_1M_2 egyenesen vannak, a T_1T_2 egyenes pedig párhuzamos az M_1M_2 egyenessel, azért a P_1, P_4 és M pontok rajta vannak az M_1M_2 egyenesnek a T_1T_2 egyenesre vonatkozó tükörképén, vagyis P_1, P_4 és M egy egyenesen vannak.

IV. megoldás: Jelöljük az $M_1M_2M_{3\Delta}$ szögeit $M_1\sphericalangle$, $M_2\sphericalangle$, ill. $M_3\sphericalangle$-gel. Mivel – mint láttuk – $MP_1M_1P_2$ és $MP_4M_2P_3$ rombuszok (1. ábra), azért az M-nél fekvő két, ill. három ívvel jelölt szögek egyenlők $M_1\sphericalangle$ ill. $M_2\sphericalangle$-gel. Az M-nél fekvő áthúzott ívvel jelölt szög pedig mint megfelelő szög, egyenlő $M_3\sphericalangle$-gel. Tehát a $P_1MP_4\sphericalangle = M_1\sphericalangle + M_2\sphericalangle + M_3\sphericalangle = 180°$, vagyis P_1, M és P_4 egy egyenesen van.

V. megoldás: Húzzunk az M ponton át párhuzamost az M_1M_2 oldallal. Messe ez M_1M_3-at D-ben, M_2M_3-at E-ben. (2. ábra).

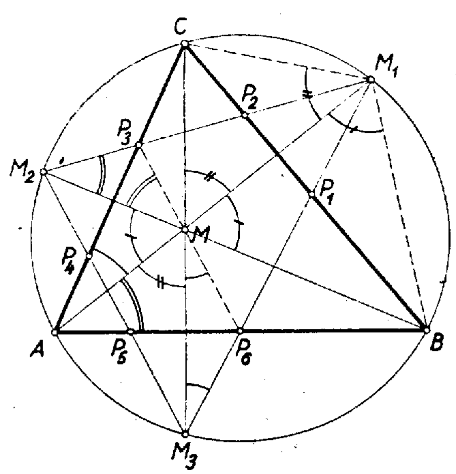


2. ábra

A segédtétel alapján következik, hogy $DMM_1\sphericalangle = MM_1M_2\sphericalangle = MM_1M_3\sphericalangle$, tehát az MM_1D_Δ egyenlőszárú, s így D az MM_1 felező merőlegesén van. E felező mérőleges azonban a BC egyenes, tehát D az M_3M_1 és BC egyenesek metszéspontja, vagyis a hatszög egyik csúcsa ($D = P_1$). Hasonlóan következik, hogy E a CA és M_2M_3 oldalak metszéspontja, amely a hatszögnek D-vel átellenes pontja ($E = P_4$). Az ezeket összekötő átló tehát valóban M-en megy keresztül. Hasonlóan okoskodhatunk a többi átlókkal is. (Lényegében ez a gondolata Pátkai György bizonyításának).

A segédtétel felhasználása nélkül, közvetlenül az M_1, M_2, M_3 pontokon átmenő kör segítségével is bizonyíthatjuk állításunkat, amint azt a VI – IX. megoldások mutatják.

VI. megoldás: Kössük össze az M pontot a hatszög P_3 és P_6 csúcspontjával (3. ábra).

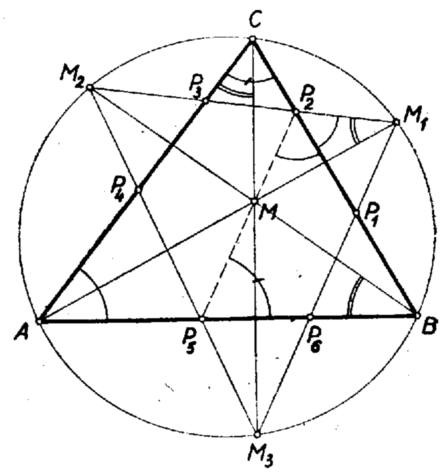


3. ábra

Az ABM_1C húrnégyszögben $A\sphericalangle + M_1\sphericalangle = 180°$. Tehát az A csúcsnál lévő, az ábrán egy ívvel, ill. két ívvel és az M_1 csúcsnál egyszer áthúzott, ill. kétszer áthúzott ívvel jelölt szögek, (szám szerint 4) összege 180°.

Az A-nál levő egyíves szög, mint kerületi szög egyenlő az M_3-nál lévő egyíves szöggel, ez pedig a tükrözés folytán egyenlő az M-nél levő egyíves szöggel. Teljesen ugyanígy bizonyítható, hogy az A-nál lévő kétíves szög egyenlő az M-nél lévő kétíves szöggel. Az M_1-nél lévő egyszer áthúzott ívvel jelölt szög, mint tükrös szög, ill. csúcsszög egyenlő az M-nél fekvő hasonló jelzésű szöggel. Ugyanez áll az M_1-nél és M-nél lévő kétszer áthúzott ívvel jelölt szögekre is. De a $P_3MP_6\sphericalangle$ éppen e négyféle szög összege, vagyis $P_3MP_6\sphericalangle = 180°$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a P_3P_6 átló átmegy az M ponton. (Tomor Benedek megoldása.)

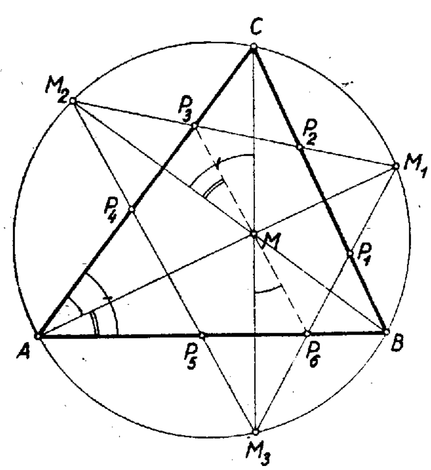
VII. megoldás: Kössük össze az M pontot a hatszög P_2 és P_5 csúcspontjával. Be fogjuk bizonyítani, hogy a BP_2MP_5 négyszögben az $M\sphericalangle = 180°$ (4. ábra).



4. ábra

A P_2-nél lévő egyíves szögek a tükrözés miatt egyenlők. Ennek a szögnek pótló szöge az M_1-nél fekvő kétíves szög, amely, mint kerületi szög, egyenlő a B-nél fekvő kétíves szöggel, ez viszont mint merőlegesszárú szög, egyenlő a C-nél fekvő kétíves szöggel. Ez utóbbi pótlószöge az A-nál fekvő egyíves szögnek. Tehát négyszögünk $P_2\sphericalangle$-e egyenlő az $ABC_\Delta A\sphericalangle$-ével. Ugyanígy bizonyíthatjuk, hogy négyszögünk $P_5\sphericalangle$-e(az ábrán egyszer áthúzott ívvel jelölve) egyenlő az $ABC_\Delta C\sphericalangle$-ével. Tehát négyszögünkben $B\sphericalangle + P_2\sphericalangle + P_5\sphericalangle = B\sphericalangle + A\sphericalangle + C\sphericalangle = 180°$, és így a negyedik szög: $M\sphericalangle = 180°$. (Bártfai Pál megoldása.)

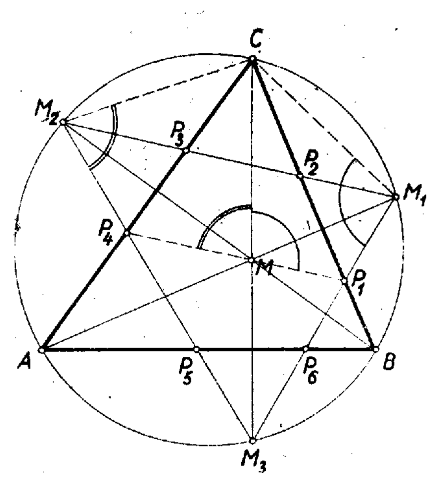
VIII. megoldás: Kössük össze az M pontot a hatszög P_3 és P_6 csúcspontjával (5. ábra).



5. ábra

Az A-nál fekvő egyíves, ill. kétíves szög a VI. megoldás alapján egyenlő az M-nél fekvő hasonló jelzésű szögekkel. E két szög összege az A-nál fekvő egyszer áthúzott ívvel jelölt szög, amely mint merőleges szárú szög, egyenlő az M-nél fekvő egyszer áthúzott ívvel jelölt szöggel, amiből következik, hogy a P_3MC egyenlő az egyíves szöggel, vagyis $P_3MC\sphericalangle$ és $P_6MM_3\sphericalangle$ csúcsszögek. Tehát a P_3P_6 átló átmegy az M ponton.

IX. megoldás: Kössük össze az M-et a hatszög P_1 és P_4 csúcspontjával, továbbá C-t M_1 és M_2-vel (6. ábra).

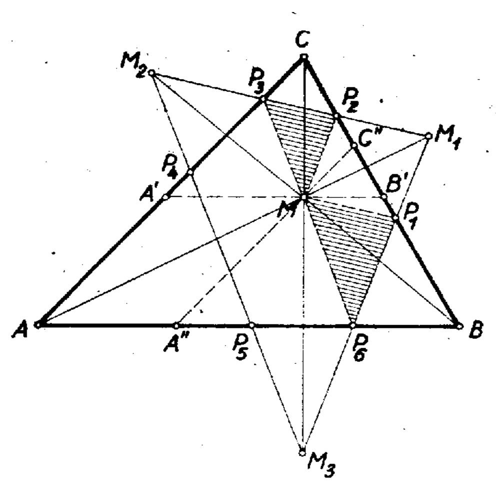


6. ábra

Az M_1-nél lévő egyíves szög a tükrözés folytán egyenlő az M-nél lévő egyíves szöggel. Ugyanígy egyenlők az M_2 és M-nél lévő kétíves szögek. De az $M_1C\,M_2M_3$ húrnégyszögben a $M_1\sphericalangle + M_2\sphericalangle = 180°$, tehát a $P_1MP_4\sphericalangle = 180°$. (Reichlin-M. Viktor megoldása.)

Az állítás következő, igen szellemes, csupán a talpponti háromszög tulajdonságain alapuló bizonyítását adta Vigassy József, a verseny győztese.

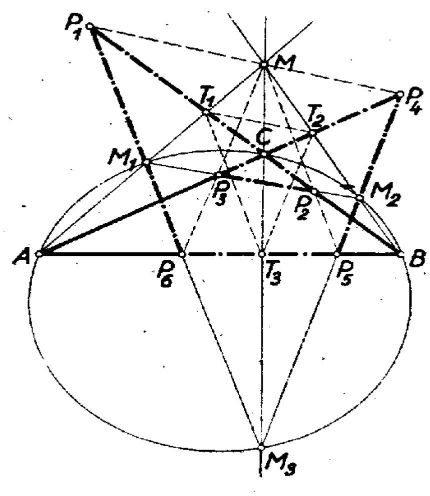
X. megoldás: Kössük össze az M pontot a hatszög $P_3P_2P_1$ és P_6 csúcsaival, továbbá húzzuk meg az ABC_Δ-ben az M-en át az AB-vel párhuzamos $A'B'$ és az AC-vel párhuzamos $A''C''$ szakaszt (7. ábra).



7. ábra

A keletkezett $A'B'C$ és $A''BC''$ háromszögek hasonlók és hasonló fekvésűek. A tükrözés folytán az MP_3P_2, ill. $P_6MP_{1\Delta}$-ek a fenti két háromszögbe írt minimális kerületű háromszögek (Gallai Péter I. oszt. Tankönyv 1953 – 332-334. old.), vagyis a talpponti háromszögek, melyek tehát egymásközt szintén hasonlók és hasonló fekvésűek. Tehát $MP_3 \parallel P_6M_1$, mint megfelelő oldalak. E két párhuzamos szakasznak M végpontja közös, ennélfogva a P_6, M és P_3 pontok egy egyenesbe esnek.

Megjegyzés: Tételünk tompaszögű háromszögre is általánosítható, de akkor a megfelelő $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ pontok hurkolt hatszögre vezetnek, melynek kétszeres pontja (hurokpontja) mindenkor a tompaszög csúcspontja. A szemközt fekvő csúcspontok most is a P_1 és P_4, P_2 és P_5, P_3 és P_6 csúcspontok (8.ábra).



8. ábra

A bizonyítás ugyanúgy történik, minta hegyesszögű háromszög esetén, csakhogy most a tompaszöget bezáró oldalokhoz tartozó magasságok (melyeknek talppontjai az oldalak meghosszabbítására esnek) a talpponti háromszög külső szögét felezik, vagyis a tompaszöget bezáró oldalak felezik a talpponti háromszög megfelelő szögeit. Az M hasonlósági centrum e szerepét most is megtartja.