A valószínűségszámítás egyik legfontosabb fogalma a *várható érték*. Több más elnevezése is használatos: matematikai remény, átlag, átlag-érték, közép-érték, ezek azonban mind egyetlen egy fogalmat jelentenek. Keletkezési ideje körülbelül megegyezik a valószínűség fogalma kialakulásának a korszakával; először HUYGENS (ejtsd: hajhensz; holland matematikus és fizikus 1629–1695) használta 1657-ben a »Szerencsejátékkal kapcsolatos számításokról« című értekezésében.

Hogy a gyakorlati jelentőségéhez közelebb férkőzzünk, vizsgáljunk meg először egy egyszerű példát. Péter és Pál kockázik. Ha 6-ost dobnak, Péter kap Páltól 5 forintot. ha pedig a többi öt számjegy valamelyike az eredmény, akkor Pál kap Pétertől 1 forintot. Kérdés, hogy ha nagyon sokszor dobják fel egymás után a kockát, melyikük számára lesz előnyös a játék? A problémát könnyű eldönteni. Elég, ha Péter pénzét vizsgáljuk, mert hiszen amennyit ő nyert, ill. vesztett, annyit vesztett, ill. nyert Pál. Annak a valószínűsége, hogy egy dobás alkalmával Péter nyerjen $\frac{1}{6}$, hogy veszítsen $\frac{5}{6}$. Ha tehát igen sok, mondjuk $n$ dobást végeznek egymásután, akkor a nagy számok törvénye értelmében Péter kb. $\frac{n}{6}$ esetben nyer, $\frac{5n}{6}$ esetben veszít. $n$ dobás után tehát kb.:

$$\frac{n}{6} \cdot 5 - \frac{5n}{6} \cdot 1 = 0$$

forinttal változott meg a pénze. A játék tehát egyikükre nézve sem előnyös, de nem is hátrányos. Ha egy 6-os dobással Péter nem 5, hanem pl. 6 forintot nyerne, akkor $n$ dobás után (feltéve, hogy $n$ elég nagy szám), nyereségre számíthat, mégpedig a nyeremény összege kb.:

$$\frac{n}{6} \cdot 6 - \frac{5n}{6} \cdot 1 = \frac{n}{6} > 0.$$

Ha ezt a nyereményt elosztjuk $n$-nel, megkapjuk az egy játékra eső nyeremény-összeget, amely a mi esetünkben $\frac{1}{6}$ Ft. Péter számára tehát ez a játék előnyös volna, Pál számára hátrányos.

Általában, ha $v_1$ annak a valószínűsége, hogy Péter nyerjen, mégpedig $a$ forintot, és $v_2$, hogy veszítsen $b$ forintot, akkor $n$ számú játék esetében (feltéve, hogy $n$ elég nagy) Péter pénze kb.

$$nv_1a - nv_2b$$

forinttal fog megváltozni. Ebből egy játékra

$$v_1a - v_2b$$

összeg esik. Hogy a játék melyikükre nézve előnyös, az attól függ, hogy az összeg pozitív, vagy negatív, és hogy mennyire előnyös, azt ennek az összegnek a nagysága mutatja. Ha

$$v_1a - v_2b = 0$$

akkor a játék méltányos, egyikükre nézve sem előnyös.

Tehát, ha csak kétféle eredményről lehet szó ($A$ nyer $B$-től $a$ forintot $v_1$ valószínűséggel, vagy $B$ nyer $A$-tól $b$ forintot, $v_2$ valószínűséggel), akkor a játék igazságos, ha

$$v_1a = v_2b, \quad \text{vagyis} \quad \frac{a}{b} = \frac{v_2}{v_1}.$$

$a$ tulajdonképpen $B$-nek a tétje, $b$ pedig $A$-nak a tétje, és a fenti azonosság azt fejezi ki, hogy a játék vagy fogadás igazságos, ha a tétek aránya egyenlő a megfogadott események valószínűségének arányával.

Tegyük fel most, hogy megváltoztatják a játékszabályokat a következő módon: ha a dobás eredménye 1 vagy 2, Péter nyer 1, ha 4, 5, vagy 6, ugyancsak ő nyer 2 forintot, míg ha 3-ast dobnak, veszít 5 forintot. Az előbbi módon eljárva azt kapjuk, hogy Péter pénze megváltozásának egy játékra eső része

$$\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{8}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ebben az esetben a játék Péterre előnyös, mert átlagban játékként $\frac{1}{2}$ forintot nyer, ami azt jelenti, hogy pl. 100 játék esetén kb. 50 forint nyereségre számíthat.

Tekintsük Péter veszteségét negatív nyereségnek ($-5$ Ft), a játszmát pedig nevezzük el kísérletnek, akkor tehát a kísérletnek három lehetséges eredménye van. Az eredményeket számszerűleg, az 1, 2, $-5$ számok fejezik ki, amelyek rendre $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ valószínűségekkel következnek be.

Általában, ha egy kísérlet lehetséges eredményét az

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N$$

számok jelzik[1], melyek rendre

$$v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_N, \qquad (v_1 + v_2 + \ldots + v_N = 1)$$

valószínűséggel következnek be, az

$$M = v_1x_1 + v_2x_2 + \ldots + v_Nx_N$$

értéket várható érteknek nevezzük. Gyakorlati jelentősége: nagyszámú kísérlet esetén a kapott összeredménynek egy kísérletre eső része. Ugyanis ha $n$ kísérletet végezünk, ahol $n$ elég nagy szám ahhoz, hogy a nagy számok törvénye értelmében

$$v_i \approx \frac{k_i}{n} \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$$

legyen (ahol $k_i$ jelenti azt a számot, amely mutatja, hogy az $i$-edik esemény hányszor következik be $n$ kísérlet közül; $k_1 + k_2 \ldots + k_N = n$), akkor

$$M \approx \frac{k_1}{n}x_1 + \frac{k_2}{n}x_2 + \ldots + \frac{k_N}{n}x_n = \frac{k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_Nx_N}{n}.$$

Az $M$ várható érték mindig az $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N$ értékek legkisebbike és legnagyobbika közé esik. Ugyanis, ha az

$$M = v_1x_1 + v_2x_2 + \ldots v_Nx_N$$

kifejezésben $x_i$ helyett ezek legnagyobbikát, $\max\limits_{1\le i\le N} x_i$ teszünk, akkor az összeget nem csökkentettük, ha pedig mindenütt $\min\limits_{1\le i\le N} x_i$ írunk, akkor nem növeltük. Mivel továbbá $v_1 + v_2 + \ldots + v_N = \sum\limits_{i=1}^{N} v_i$[2] $= 1$, azért

$$\min_{1\le i\le N} x_i = \min_{1\le i\le N} x_i \sum_{i=1}^{N} v_i \le M \le \max_{1\le i\le N} x_i \sum_{i=1}^{N} v_i = \max_{1\le i\le N} x_i.$$

$nM$ tehát az $n$ kísérlet során kapott összeg. Ez azonban csak akkor áll fenn, a gyakorlat csak akkor igazolja, ha $n$ elég nagy szám. Nem lehet tehát azt mondani, hogy mivel $nM$ az $n$ kísérlet során kapott összeg, azért $n$ helyébe 1-et téve, $M$ nem más, mint az egy kísérlet által kapott érték. Mégis abban az esetben, ha az $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N$ számok egy valamilyen érték körül tömörülnek oly módon, hogy az ettől az értéktől távoleső $x_k$ tagokhoz tartozó $v_k$ valószínűségek nagyon kicsinyek, más szóval, ha az $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N$ értékeknek az előbbi értelemben vett »szórása« kicsi, akkor egy kísérlet esetében is a kísérlet eredménye nagy valószínűséggel közel fog esni $M$ értékéhez. Ennek a bizonyítására azonban már nem térünk ki, csak megjegyezzük, hogy egyetlen kísérlet esetében mindig meg kell vizsgálnunk, hogy a szórás milyen, tehát gyakorlatilag csak akkor alkalmazhatjuk sikerrel a várható érték fogalmat.

Végül meg kell említenünk, milyen nagy hasonlóság van a mechanikai tömegközéppont és a várható érték fogalma között. Ha a számegyenesen az $x_1, x_2, \ldots, x_N$ pontokba rendre elhelyezzük a $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_N$ tömegű pontokat, akkor ezek tömegközpontjának a helye megegyezik várható érték helyével a számegyenesen.

Nézzünk most néhány példát.

1. Valakinek annyi forintot ígérnek, ahányszor az első dobástól kezdve egymás után csupa írást dob egy pénzdarabbal, legfeljebb $N$ dobásból. Mennyi a nyeremény várható értéke?

**Megoldás:** Annak valószínűsége, hogy pontosan $k$-szor dob egymás után írást, nem más, mint az $\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}}\ldots\overset{k}{\mathrm{I}}\,\overset{k+1}{\mathrm{F}}$ sorozat valószínűsége, vagyis $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$. Tehát 1 forintot $\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$ valószínűséggel nyer, 2 forintot $\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$ valószínűséggel stb. A várható érték tehát

$$M = 1\cdot\frac{1}{2^2} + 2\cdot\frac{1}{2^3} + \ldots + N\cdot\frac{1}{2^{N+1}} = \sum_{k=1}^{N} k\frac{1}{2^{k+1}}.$$

Pl., ha $N = 5$, akkor a várható érték

$$M = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \frac{4}{32} + \frac{5}{64} = \frac{57}{64}.$$

2. Két csapat röplabdázik. Annak valószínűsége, hogy az $A$ csapat nyer egy játszmát $v_A$, hogy a $B$ csapat nyer egy játszmát, $v_B (v_A + v_B = 1)$. A mérkőzést az a csapat nyeri, amelyik előbb nyer három játszmát. Mennyi a lejátszandó játszmák várható száma?

**Megoldás:** Legalább 3 és legfeljebb 5 játszmát kell játszani. Jelöljük a megfelelő valószínűségeket $v_3$, $v_4$ ill. $v_5$-tel ($v_3 + v_4 + v_5 = 1$).

---

[1]Bennünket most csak olyan kísérletek érdekelnek, amelyek eredményei számszerű adatok. Ha azt a kérdést vizsgáljuk, hogy egy kártyacsomagból milyen színű kártyát húzunk ki, ezzel a problémával kapcsolatban nincs értelme várható *értékről* beszélni.

[2]Olvasd: szumma $v_i$, $i = 1$-től $N$-ig.

3 játszmával akkor ér véget a mérkőzés, ha vagy az $A$, vagy a $B$ csapat nyer 3 játszmát egymásután, tehát

$$v_3 = v_A^3 + v_B^3.$$

4 játszma esetén az egyik fél nyer hármat, a másik 1-et, de az utóbbi lehet az első, második, vagy harmadik játszma, tehát

$$v_4 = 3v_A^3 v_B + 3v_A v_B^3 = 3(v_A^3 v + v_A v_B^3).$$

Hasonló meggondolással

$$v_5 = \binom{4}{2}(v_A^3 v_B^2 + v_A^2 v_B^3).$$

A várható érték tehát

$$M = 3v_3 + 4v_4 + 5v_5.$$

Numerikus példa: Legyen $v_A = \dfrac{2}{3}$, $v_B = 1 - v_A = \dfrac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}
v_3 &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} + \frac{1}{27} = \frac{9}{27},\\
v_4 &= 3\left(\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{27}\right) = \frac{8}{27} + \frac{2}{27} = \frac{10}{27},\\
v_5 &= 6\left(\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{9} + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{27}\right) = \frac{16}{81} + \frac{8}{81} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}.
\end{aligned}$$

Tehát

$$M = 3\cdot\frac{9}{27} + 4\cdot\frac{10}{27} + 5\cdot\frac{8}{27} = \frac{107}{27} \approx 3{,}96.$$