I. A közönséges – más szóval euklideszi – geometriában két pontra, X és Y-ra nézve mindig értelmezve van egy nem negatív szám – jelöljük $\varrho(XY)$-nal –, amely szám kielégíti a következő kirovásokat:

1. *az azonosság axiómáját:* $\varrho(XY) = 0$ akkor és csakis akkor, ha az X és Y pontok azonosak egymással;
2. *a szimmetria axiómáját:* $\varrho(XY) = \varrho(YX)$;
3. *a háromszögaxiómát:* bármely három X, Y, Z pontra nézve

$$\varrho(XY) + \varrho(YZ) \geq \varrho(XZ).$$

Tüstént nyilvánvalóvá válnak a mondottak, ha választunk egy egységszakaszt és $\varrho(XY)$ számon az XY egyenesszakasznak erre az egységre vonatkozó mértékszáma, más szóval távolsága.

Az 1–3. axiómarendszert szemmel láthatóan a tapasztalati térből absztraháltuk és a közönséges geometria, szemlélettől független, tárgyalásához szükséges axiómarendszer egy részét alkothatják. (Euklidesz ugyan más axiómarendszerből indul ki és így pl. a szóban forgó 3. axióma nála tétel, amelyet az ő axiómarendszeréből le is vezet.)

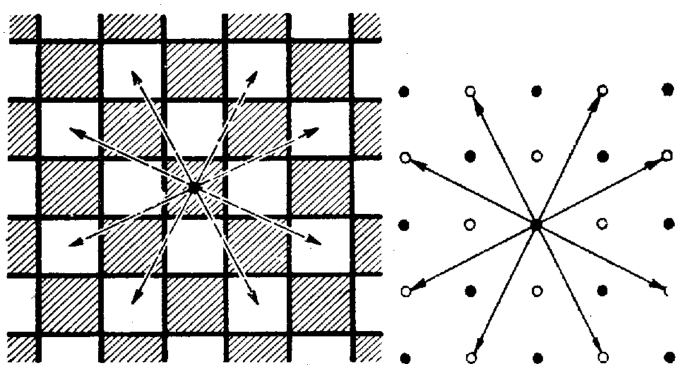
Fréchet (ejtsd: frése) neves francia matematikus – 1906-ban – felfedezte, hogy olyan összefüggések, amelyek az euklideszi geometriára jellemző speciális összefüggéseknek látszottak, már sokkal általánosabb jellegű halmazokban is érvényesek. (Halmazon bizonyos elemek összességét értjük. Így pl. az euklideszi pontsík is halmaz: a sík pontjainak összessége.) Nevezetesen azokban a halmazokban, amelyek az 1–3. axióákat kielégítik.

Tekintsünk egy tetszőleges Σ halmazt, elemeit nevezzük (önkényesen) pontoknak, jelöljük őket A, B, C ... XYZ ...-vel. Ha teljesülnek az 1–3. axiomák, akkor a Σ-t *metrikus ponthalmaznak*, a $\varrho(XY)$ számot az X és Y pontok egymástól való távolságának nevezzük.

II. Most pedig egy különös példát mutatunk a metrikus ponthalmazra. Tekintsük a végtelen sakktáblát (vagyis az egész síkot hézagtalanul befedő, végtelen sok mezejű sakktáblát). Nevezzük a tábla mezőit pontoknak, továbbá egy mezőről más mezőre vezető lehető legkevesebb lóugrás számát a két pont (vagyis a két mező) egymástól való távolságának. (Egy mezőről önmagára vezető legkevesebb lóugrás száma ugyan 2 – ugrás és annak visszája – azért egy pontnak önmagától való távolságát nem a különböző pontok távolságának mintájára értelmezzük, hanem 0-nak vesszük.)

A mondott halmaz a benne értelmezett távolság fogalom szerint megfelel az 1–3. axiómáknak. Ellenőrizzük ennek az állításnak a helyességét.

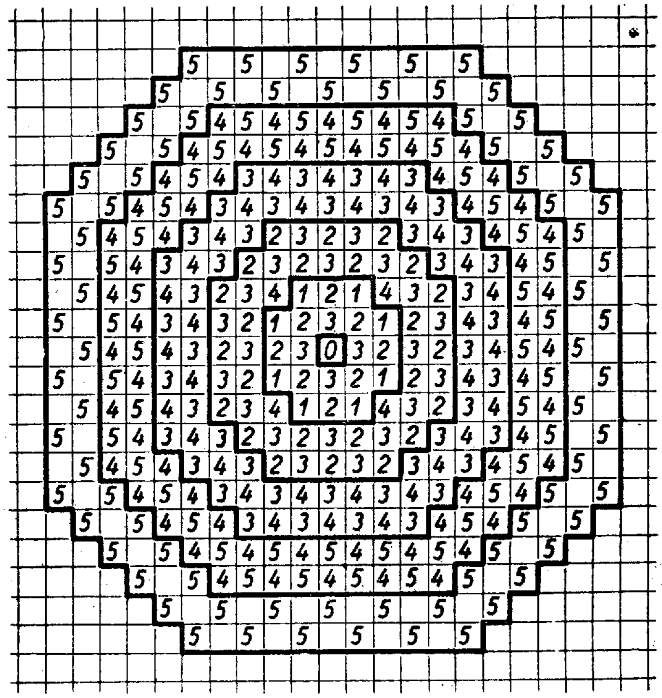
Először is azt kell megmutatnunk, hogy bármelyik két (különböző) mezeje is a végtelen sakktáblának az X és Y, a $\varrho(XY)$ számot egyértelműen meghatározzák.



1. ábra

Először is kiválasztunk egy mezőt, X-et. Ezt rögzítjük és Y gyanánt vegyük egyenként a sakktábla többi mezejét. (Az 1. ábrán az X szerepét a középső sötét mező játssza.) Írjunk az X mezőre 0-t. A belőle egyetlen ugrással elérhető mezőket jelöljük meg 1-essel. (8 fehér mező, az 1. ábrán a 8 nyíl vége mutatja a mezőket.) Most ugyanezt az eljárást egymásután hajtsuk végre az 1-essel jelölt mezőkből kiindulva, s jelöljük az elért mezőket 2-sel. Ha már számozott mezőre érkezünk, akkor nem írunk újabb számot a mezőre, hanem megtartjuk a már odaírtat. Most megismételjük a 2-sel jelölt pontokból kiindulva az eljárást és az elért, de még nem számozott mezőket 3-sal megjelöljük. És így tovább.

Az így származtatott számkonfigurációt (az 5-ös mezőkig terjedően) a 2. ábrán mutatjuk be.



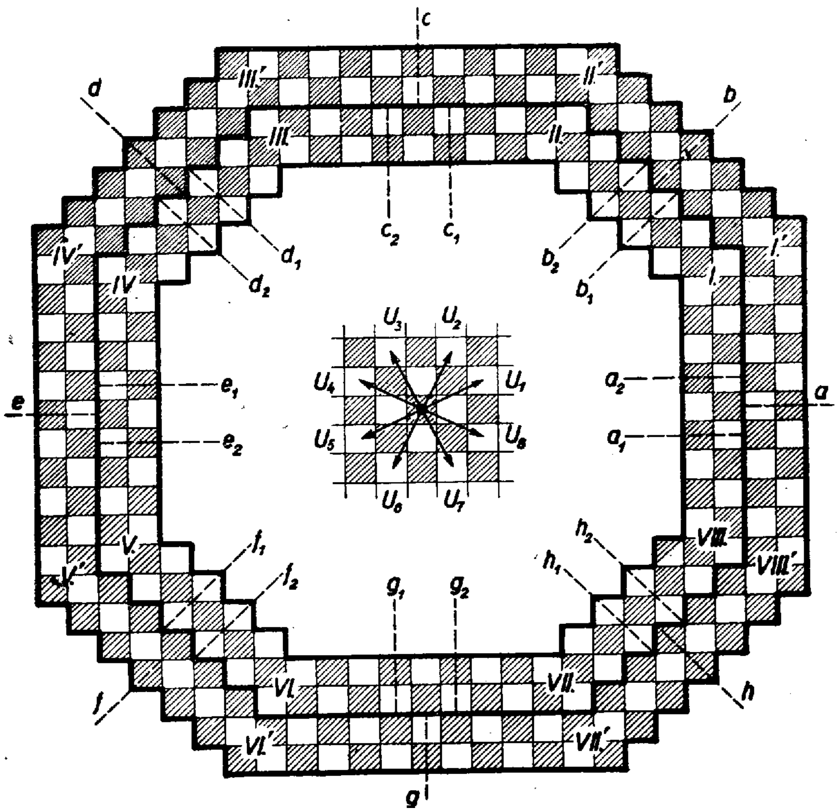
2. ábra

(A sakktáblának e számokat tartalmazó mezői sötét-világos színváltakozását nem tüntettük fel, hiszen ha 0-sal sötét mezőt számoztunk, akkor minden páros, ill. páratlan számmal jelölt mező sötét, ill. világos, ezért a színezést mellőzhettük.) E konfiguráció előállítási utasításából nyilvánvaló, hogy bármelyik mezőre írt szám annak a mezőnek a 0-sal jelzettől való lóugrástávolságát jelenti e távolság definíciójának megfelelően.

A számkonfigurációt – az egyedülálló középső mezőtől eltekintve – két mezőnyi szélességű övekre tagoltuk, amelyek – belülről kezdve a számlálást – az 5-ik övtől fogva szabályos számelosztási szerkezetet mutatnak. Nevezetesen azt, hogy az n-ik övön túl már n-essel jelölt mező nincs (ez már akkor is teljesül, ha $n > 2$), az övben pedig a mezők színváltakozásának megfelelően csak n és $(n+1)$ számok lépnek fel. Ha pedig az n- és $(n-1)$-ik övet egyesítjük (itt már kell az $n > 4$ kirovás), akkor a keletkezett 4 mezőnyi szélességű öv az összes n-essel jelölt mező tartalmazza, s fellépnek benne még $(n+1)$-essel) és $(n-1)$-essel jelölt mezők.

Utolsó állításunk $n = 5$-re már helyes voltát megkonstruált számkonfigurációnk, vagyis a 2. ábra bizonyítja. Az $n > 5$ esetben pedig a bizonyítás abból áll, hogy ha a tétel valamely n értékre nézve fennáll, akkor abból az $(n+1)$-re való helyessége is következik. Ilyen n van: $n = 5$. Hajtsuk végre a bizonyítást.

Tegyük fel, hogy számkonfigurációnk az n-ik övig ki van dolgozva. Ebben az övben a mezők színváltakozása szerint az n és $(n+1)$ lép fel váltakozva. Tudjuk, hogy az $(n-1)$-ik övben csak $(n-1)$ és n számjegyek lépnek fel, s ennek az övnek a külső határvonalán kívül $(n-1)$-essel jelölt mező nincs. Belső határvonalán belül pedig n-essel jelölt mező nincs. Tekintsük most az $(n+1)$-ik övet. Ebbe az övbe csakis az n-ik öv mezőiből lehet egy-egy lóugrással bejutni. Mégpedig bármelyik mezejére és egy lóugrás az n-ik övből az $(n+1)$-ik övön túlra már nem vezet ki.



3. ábra

(A 3. ábra éppen az n-ik és $(n+1)$-ik öv helyzetviszonyát szemlélteti. Ha a középső mező világos volna, akkor ugyanazokban az övekben a sötét és világos mezők helyén világos és sötét mezők volnának.)

Minthogy a lóugrás egy mezőről ellentett színű mezőre vezet, s az n-ik övben csak n és $(n+1)$ számok szerepelnek a színek váltakozása szerint, továbbá az $(n+1)$-ik övbe csakis az n-ikből léphetünk egy lóugrással, azért az $(n+1)$-ik övben – a színek váltakozását követve – csakis az $(n+1)$ és $(n+2)$ számok lépnek fel. Csak azt kell még belátnunk, hogy az $(n+1)$-ik övben nem marad számozatlan mező, vagyis mindegyik mezőre vezet alkalmas lóugrás az n-ik öv alkalmas mezejéről.

Pl. a külső öv a, b egyenesekkel határolt I′ részébe mindenüvé eljuthatunk a belső öv a_1, b_1-gyel határolt részéből, ha ennek minden mezejéről egy-egy, u_1 irányú lóugrást teszünk. (A részhez a kettészelt mezők is hozzáértendők.) Hasonlóan a többi részre is a megfelelő sorszámú részből a megfelelő számozású irányban tett lólépéssel. Az I′–VIII.′ részek pedig hézagtalanul megtöltik a külső övet. S ezzel az $n > 5$-re nézve befejeztük állításunk bizonyítását.

Láttuk, hogy a középső mező körül gyűrűző övek sorozata határtalanul folytatható s a benne fellépő számelrendezés egyértelműen meghatározott processzus. A konfiguráció középső mezeje legyen X, egy tetszőleges másik mezeje Y. Most $\varrho(XY)$-on éppen az Y mezőre írt számot értjük.

Az így definiált $\varrho(XY)$ nyilvánvalóan kielégíti a Fréchet-féle 1. axiómát.

Minthogy minden lóugrás visszája is lóugrás és a lóugrások sorozataként előállított utat a visszája ugrások fordított sorozataként is leírhatjuk (a végponttól a kezdőpontig), könnyen belátható a 2. axióma teljesülése is.

Ha a 3. axióma nem teljesülne, akkor volna olyan 3 mező – X, Y, Z – hogy azokra nézve fennállna a

$$\varrho(XY) + \varrho(YZ) < \varrho(XZ).$$

Ez azonban a $\varrho(XY)$ minimális voltának mondana ellent: vagyis volna a $\varrho(XY)$-t definiáló, lóugrással leírt útnál kevesebb ugrásból álló is (mely X mezőről Y-on át vezetne Z-re). Tehát a 3. axióma is teljesül.

III. Tekintsük hát pontoknak a végtelen sakktábla mezőit, távolságnak ama lóugrások számát, melynél kevesebb nem vezet kijelölt mezőről kijelölt mezőre és nevezzük az így értelmezett geometriát – a közönséges geometriától megkülönböztetendő – »mesterséges geometriá«-nak. Némi ízelítőt adunk a felmerülő kérdésekből. Elegendő lesz annak a viszonylag egyszerű kérdésnek a tisztázása, hogy van-e a mesterséges geometriában egyenes, helyesebben (egyenesvonalú) pontsor ?

Ha már megvan a pont és távolság fogalma (mégpedig a távolságnak az egyenestől függetlenül értelmezett fogalma), akkor a két fogalom segítségével a pontsor már definiálható. Lássuk ezt először is a közönséges geometriában.

(a) – A közönséges geometriában három pontról – X, Y, Z-ről – akkor és csak akkor mondjuk, hogy lineáris ponthármas, ha az

$$XY + YZ = XZ, \qquad YZ + ZX = YZ, \qquad ZX + XY = ZY$$

távolság-relációk egyike teljesül.

Egynél több egyszerre nem is teljesülhet. Hiszen pl. ha az első kettő teljesülne, akkor ezekből az 1. és 2. axiómák alapján az Y és Z azonossága következnék. Tehát nem volna az X, Y, Z (valódi) ponthármas, hanem csak pontpár.

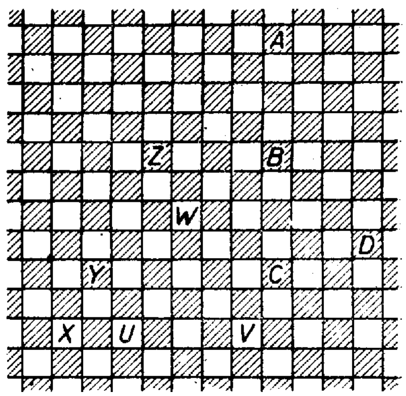
(b) – A közönséges geometriában akkor, de csak akkor mondjuk, hogy Y az X és Z között van, ha az $XY+YZ = XZ$ távolság-reláció fennáll.

(c) – A közönséges geometriában akkor, de csak akkor nevezzünk egy ponthalmazt (egyenesvonalú) pontsornak, ha bármely három pontja lineáris ponthármast alkot; de nincs a térnek a halmazhoz nem tartozó olyan pontja, mely a halmaz bármelyik két pontjával együtt lineáris ponthármast alkot.

A pontosvesszőig írt követelménynek pl. egy egyenes egyenlőközű pontsorozata is megfelel, mert e ponthalmaz bármely 3 eleme lineáris ponthalmazt alkot. A definíció második részének azonban már nem felel meg, mert található a halmazhoz nem tartozó pont – mégpedig az euklideszi értelemben vett sorozóegyenes bármely pontja – amely a halmaz bármely két pontjával együtt lineáris ponthármast képzett. Mondhatnók, hogy a szóbanforgó halmaz kibővíthető további elemmel úgy, hogy a bővített halmaznak is megvan az *(a)*-ban kikötött tulajdonsága. Tehát e két követelmény csak együtt képes az egyenes összes pontjait jellemezni.

Ha van olyan ponthalmaz a mesterséges geometriában, mely a *(c)* kirovásait teljesíti, akkor azt a mesterséges geometriában is egyenesvonalú pontsornak, röviden pontsornak nevezzük.

(a)* Tekintsük a 4. ábra XYZ, ABC ill. ABD ponthármasait.



4. ábra

Mindhárom lineáris ($1 + 2 = 3$, a két utóbbinál pedig $2 + 2 = 4$). Figyeljük meg: az első kettő egy euklideszi értelemben vett sorozóegyenesen helyezkedik el, míg ABD euklideszi értelemben háromszöget alkot. Viszont az UVW nem lineáris, hanem háromszög elrendezésű, sőt szabályos, abban az értelemben, hogy

$$\varrho(UV) = \varrho(VW) = \varrho(WU) = 2,$$

röviden:

$$UV = VW = WU = 2.$$

(b)* Az Y pont X és Z között, a B pont az A és C, ill. A és D között van.

(c)* A sakktábla valamely X mezejéből kiinduló, egymás után tett, mindig u_1 irányú lóugrásokkal elért mezőket rendre jelölje: $X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots$; az u_5 irányú lóugrással elért mezőket pedig jelölje rendre $X_{-1},\ X_{-2},\ X_{-3},\ \ldots$. Az így létesített »ponthalmaz«

$$\ldots,\ X_{-2},\ X_{-1},\ X_0,\ X_1,\ X_2, \ldots$$

végtelen sok pontból áll és bármelyik három eleme lineáris hármast alkot, ami az

$$X_mX_n = |n - m|$$

távolság kifejezésből – ahol | | a bennefoglalt kifejezés abszolút értéket jelenti – könnyen belátható.

Azt is tudjuk bizonyítani (de hosszadalmassága, körülményessége miatt csak a IV. pontban fogjuk a bizonyítást sorra venni), hogy ha a most definiált

$$\ldots,\ X_{-2},\ X_{-1},\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ \ldots \qquad (e)$$

ponthalmazhoz bármely, hozzá nem tartozó Y pontot csatolunk, akkor az így kibővített halmazra nézve már nem teljesül a »bármely három pontja lineáris ponthármast alkot« követelmény. Vagyis a bővített halmaz már nem képez pontsort. Eszerint a szóbanforgó *(e)* halmaz éppen egy egyenesvonalú pontsor.

Az X_0 mezőből kiindulva nemcsak az u_1, u_5 iránypárral folytatott lóugrás-sorozattal, hanem az u_2, u_6; u_3, u_7; u_4, u_8 iránypárokkal is létesíthetünk pontsorokat. Így minden ponton (mezőn) »átmegy« négy olyan pontsor, amilyent az előbbiekben értelmeztünk.

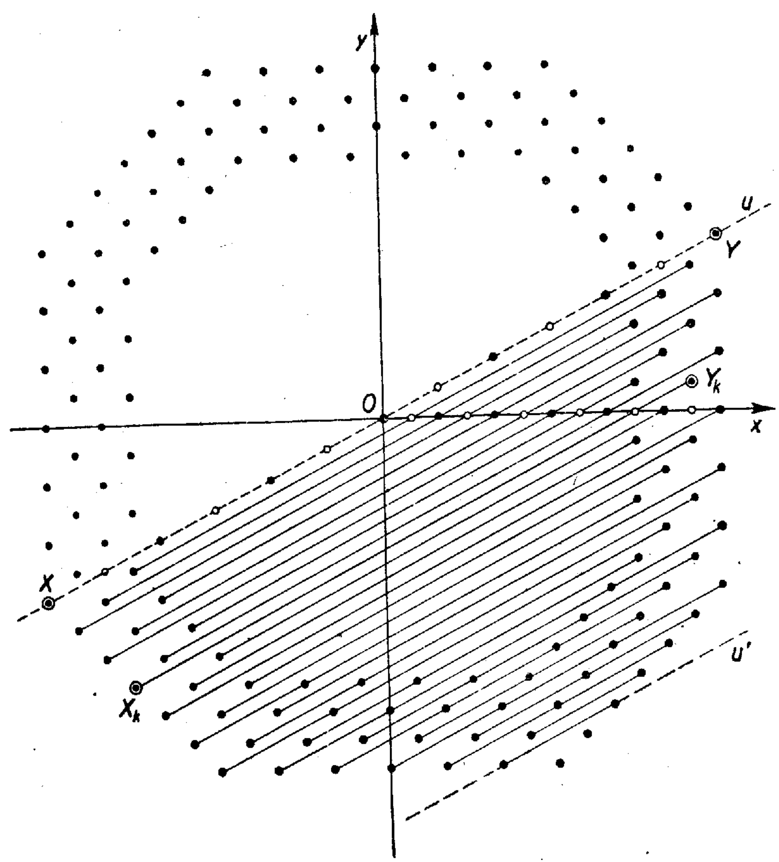
Tüstént felmerül a kérdés, hogy kimerítettük-e a »mesterséges tér« összes pontsorait, vagyis az, hogy létezik-e a mondottakon kívül más ponthalmaz is, mely megfelel a *(c)*-ben adott két követelménynek? Ennek és sok más, önmagától felmerülő kérdésnek a tisztázását azonban már az olvasóra bízzuk.

IV. A sakktáblára írt konfigurációk áttekinthetőbbek, ha a mezőket a mezők középpontjaival képviseltetjük, mint pl. az 1. ábrán. Ha e pontok sötét és világos jellegét nem tekintjük, akkor a végtelen sakktáblát képviselő ponthalmazt *négyzetrácsnak*, röviden *rácsnak* nevezzük. Rácsot alkotnak a derékszögű koordinátarendszerben ama pontok, amelyeknek koordinátái egész számok. Ha ennek a rácsnak a pontjait két osztályra bontjuk, egyikbe sorolva mindazokat, amelyeknek mindkét koordinátájuk vagy páros, vagy páratlan, a másik osztályba pedig a többit és a két osztály egyikét sötétre, másikat világosra színezzük, akkor előáll a sakktábla képviselője.

A pontrácson az egy mezőről kiinduló lóugrásokat egy rácspont nyolc különböző irányú eltolása képviseli (vö. 1. és 3. ábrát). Ha egy rácsponton átmenő egyenes iránytangense 1/2, akkor az egyenes végtelen sok rácspontot fűz fel (mint az 5. ábrán pl. az u egyenes). A felfűzött pontok egyenlőközű sorozatot képeznek az egyenesen, mégpedig – ha a pontrács sakktábla-színezése, akkor – váltakozó színű pontok sorozatát.

Ha mindazokat az egyeneseket megrajzoljuk, amelyek rácsponton mennek át és iránytangensük 1/2, akkor csupa ilyen egyenlőközű pontsorozatra bontottuk a rácsot. Maguk az egyenesek pedig egyenlőközű sávokra bontják a síkot.

No most nézzük az 5. ábrát és hasonlítsuk össze a 2. és 3. ábrával.



5. ábra

Az 5. ábra sötét pontjainak nyolcszögű koszorúja olyan mint a 3. ábra két szélső övében foglalt sötét mezők váza. (Még néhány más, lényeges rácspont ki van emelve, de a többi rácspontot nem is jelöltük.) Most már sorra vesszük a III. *(c*)*-ban ígért bizonyítást és ahhoz az 5. ábrát tekintjük.

A sötét origóból kiindulva az $m = 2n (> 5)$ lóugrással elérhető pontok legyenek a nyolcszögű pontkoszorú (sötét) pontjai. (A 2. és 3. ábrával összefüggésben bizonyítottuk, hogy ezek a középső, sötét mezőt körülvevő m-ik és $(m-1)$-ik öv sötét mezőinek felelnek meg.)

Az origón átmenő, 1/2 iránytangensű egyenes, az u éppen a nyolcszögű pontkoszorú két szemközti, sötét pontját köti össze, az X és Y pontot. Ezt az XY átlót a közbeeső rácspontok $2m = 4n$ (lóugrásnak megfelelő) egyenlő szakaszokra bontják. Nyilvánvaló, hogy a rácspontokon átmenő, az u-val párhuzamos egyenesek ama szakasza, mely a sötét pontkoszorúból általuk felfűzött két legszélső pont – X_k és Y_k – közé esik, kisebb az XY szakasznál. Vagyis mesterséges geometriánkban tekintve a távolságokat:

$$XY = 4n, \quad X_kY_k < 4n, \quad OX_k = 2n, \quad OY_k = 2n, \qquad (g)$$

mert X_k, Y_k a $(2n)$-ik és $(2n-1)$-ik öv sötét, vagyis $2n$-essel számozott pontjai közül való pontok. Eszerint azonban mesterséges geometriánkban sem alkot lineáris hármast az OX_kY_k.

Tekintsük most a III. *(c*)*-ban definiált $\ldots,\ X_{-2},\ X_{-1},\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ \ldots$ ponthalmazt. Ez olyan, hogy a rácson éppen $1/2$ iránytangensű egyenesre, u'-re van mindegyik pontja felfűzve. Legyen továbbá egy O rácspont a szóbanforgó ponthalmaz elemei közé nem tartozó. Ámde akkor a szó közönséges geometriai értelmében sincs rajta az O az u' egyenesen. Van-e olyan, az O szerepét betöltő rácspont, amelyik az u' rácspontjainak bármelyik kettejével együtt lineáris hármast alkot – most a szó mesterséges geometriai értelmében – ez itt a kérdés.

Színezzük úgy, sakktáblaszerűen a rácsot, hogy a tetszőlegesen kiválasztott O rácspont sötét legyen. Ha n egész számot elég nagynak választjuk, akkor az O középhez tartozó $(2n)$-ik és $(2n-1)$-ik öv sötét rácspontjai alkotta koszorúnak és legalább két pontja az u' egyenes O-val ellenkező oldalán. No de akkor lesz legalább kettő magán az u' egyenesen is, amelyekkel pedig az O – a fennálló *(g)* relációk szerint – nem alkothat lineáris hármast a mesterséges geometria értelmében sem. Eszerint hát az u' egyenes rácspontjaihoz újabb rácspontot nem csatolhatunk, mert a bővített halmazban már O-hoz mindig van u'-nek két az O-val nem lineáris hármast alkotó pontja. Ezzel az ígért bizonyítást be is fejeztük.