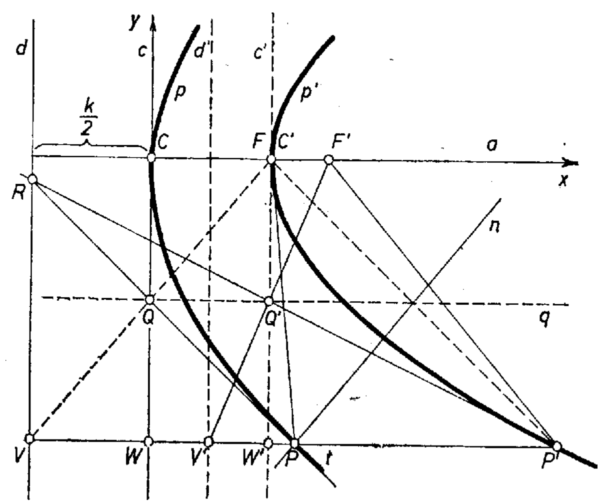
Ismeretes, hogy az F fókuszt tükrözve a parabola bármely P pontjához tartozó t érintőre, P-nek a d vezéregyenesen levő V merőleges vetületét kapjuk, vagyis amely pontra a definíció szerint $PV = PF$. Eszerint a szóban forgó P' pont V-nek képe a t, n egymásra merőleges egyeneseken való, egymás utáni két tükrözés után. Azt is tudjuk, hogy két ilyen tükrözés eredménye ugyanaz, mint a tengelyek metszéspontjára – itt P-re – való tükrözésé, tehát P' a VP félegyenesen van, és $VP' = 2 \cdot VP$.

Eszerint a keresett p' mértani hely az adott p parabolából áll elő, ennek a vezéregyenesére merőleges irányú $2:1$ arányú nyújtásával. Bebizonyítjuk, hogy p' is parabola. Evégett megadunk egy olyan F' pontot és d' egyenest, melyektől p'-nek minden pontja egyenlő távolságra van.



Ennek során felhasználjuk az ábra alakzatának alábbi két tulajdonságát. F-nek a fenti t érintőn levő Q vetülete rajta van p-nek c csúcsérintőjén, így a mondott tükrözés miatt $FQ = QV$, eszerint Q rajta van az a parabolatengely és a VP egyenes közti síksáv q szimmetriatengelyén. Továbbá c és VP metszéspontját W-vel jelölve FCQ és QWP hasonló derékszögű háromszögek, ezért

$$FC : CQ = QW : WP = CQ : WP. \tag{1}$$

Mármost p-nek a tengelye egyszersmind p'-nek is szimmetriatengelye, hiszen F-et p-nek két az a-ra szimmetrikus pontjához tartozó normálisra tükrözve a tükörképek szimmetrikus helyzetűek a-ra. Ha pedig P-ként p-nek C csúcsából indulunk ki, P'-ként F-et kapjuk, mert ekkor a normális azonos az a tengellyel, és F képe önmaga. Azt sejtjük tehát, hogy p' csúcsa F, és így az F-en átmenő, a-ra merőleges c' egyenes p'-nek csúcsérintője.

Legyen még t-nek d-vel való metszéspontja R, ekkor a megállapított nyújtásból azt is sejtjük, hogy az RP' egyenes p'-nek érintője. Ezek alapján várható, hogy F'-t és d'-t az alábbiak szerint kapjuk: messe RP' a q egyenest Q'-ben, ekkor a Q'-ben RP'-re állított merőleges a-ból F'-t, a VP' egyenesből pedig d'-nek egy V' pontját metszi ki, és így d' a V'-ből a-ra állított merőleges.

Ezt fogjuk bizonyítani. Így mindenesetre $Q'F' = Q'V'$, és így $P'F' = P'V'$, P egyenlő távolságra van F'-től és d'-től. Ezért csak azt kell belátnunk, hogy a szerkesztett F' pont és d' egyenes helyzete független P megválasztásától.

Q' rajta van c'-n, mert $q \| VP'$ és $VP' = 2 \cdot VP$ miatt q-nak az RVP' háromszögbe eső szakaszát az RP súlyvonal felezi, Q'-nek d-től való távolsága 2-szer akkora, mint Q-é, egyszersmind c-nek d-től való távolsága. Legyen még c' és $V'P'$ metszéspontja W', ekkor

$$W'P' = VP' - VW' = 2 \cdot VP - 2 \cdot VW = 2(VP - VW) = 2WP,$$

ezért az $F'C'Q'$ és $Q'W'P'$ hasonló derékszögű háromszögek, valamint (1) felhasználásával

$$F'C' = Q'W' \cdot \frac{C'Q'}{W'P'} = \frac{CQ^2}{W'P'} = \frac{CQ^2}{2WP} = \frac{FC}{2} = \text{állandó}.$$

Fordítva, p'-nek minden P' pontja előáll p-nek abból a P pontjából, amelyet a P'-n átmenő, a-val párhuzamos egyenes metsz ki.

Eszerint p' valóban parabola, csúcsa azonos F-fel, vezéregyenese pedig a CF szakasz felező merőlegese (paramétere fele akkora, mint az adott parabola paramétere).

Megjegyzés. A versenyzők a $VP' = 2VP$ összefüggés megállapítása után kizárólag koordináta-geometriai úton dolgoztak.

Legyen az adott parabola egyenlete

$$x = \frac{y^2}{2k}, \tag{2}$$

ennek vezéregyenese az $x=-k/2$ egyenes, így ha P koordinátái $(x,\, y)$, akkor $VP=x+k/2$, és ezért $VP'=2VP=2x+k$ és P'-nek x', y' koordinátái:

$$x'=VP'-\frac{k}{2}=2x+\frac{k}{2},\qquad y'=y.$$

Innen

$$x=\frac{1}{2}\left(x'-\frac{k}{2}\right),\qquad y=y',$$

és ezeket (2)-be helyettesítve P'-re a következő összefüggés áll fenn:

$$x'=\frac{y'^2}{k}+\frac{k}{2}.$$

Ez pedig parabola egyenlete, melynek tengelye az x tengely (a pozitív fele), paramétere $k'=k/2$ és csúcsa a $(k/2,\, 0)$ pont, ennélfogva fókusza és vezéregyenese:

$$F'\left(\frac{3k}{4},\, 0\right),\qquad x=\frac{k}{4}.$$

Kemény András (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o. t.)
Barra Károly (Salgótarján, Madách I. Gimn., IV. o. t.)