

Ezidén e verseny március 9-én ugyanolyan szabályok szerint folyt le az egyes iskoláknál, mint tavaly: csak a gimnáziumok és ipari technikumok III. és IV. osztályú tanulói indulhattak. Munkaidő: 5 óra. Az elrendelt házi, selejtező versenyek ellenére a résztvevők száma most is 3000-en felül volt és a beadott 2896 dolgozat (209 iskolából) sem maradt el lényegesen a tavalyi 2943 mögött, csakhogy az idén az ipari technikumok 757 beadott dolgozattal szerepeltek a tavalyi 353 helyett. A versenybizottság határozata alapján az április 20-iki döntőbe 287 tanuló került (a beadott dolgozatok 9,8%-a) a tavalyi 189 (6,4%) tanulóval szemben. Az ipari technikumai tanulók közül, a tavalyi 24-gyel szemben, ez idén 41-en kerültek a döntőbe, ami számszerűen mégiscsak gyarapodás, ha százalékos arányban csökkenést is jelent. (Inkább arra mutat, hogy túl sok ipari technikumai tanuló indult.) A részletes adatok a mellékeltlen közölt megyék és iskolafajok szerinti kimutatásban megtalálhatók.

Mikor örömmel állapítjuk meg, hogy a döntőbe jutott 287 tanuló közül 128-an (44,6%) lapunk feladatmegoldói, egyben rá kell mutatnunk, hogy milyen nagy számmal vannak még tanulók, sőt egész iskolák, amelyek még nem kapcsolódtak be a Középiskolai Matematikai Lapok munkájába. Érdekes még megemlíteni, hogy a tavalyi Arany Dániel versenyen helyezést elért 45 II. oszt. tanuló és a Rákosi versenyen helyezett 29 III. oszt. tanuló közül, 13, ill. 4 kivételével, ez idén is mind bejutottak a döntőbe.

Alább közöljük a kitűzött három feladatot a megoldásokkal együtt:

1. feladat. *Bizonyítandó, hogy ha a és b pozitív számok, akkor*

$$(a + b)(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)(a^3 + b^3)$$

Megoldás: Elegendő megmutatni, hogy a két oldal különbsége nem lehet negatív. Alakítsuk át e különbséget:

$$\begin{aligned} (a + b)(a^4 + b^4) - (a^2 + b^2)(a^3 + b^3) &= a^4b - a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 = \\ &= ab[a^2(a - b) + b^2(b - a)] = ab(a - b)(a^2 - b^2) = ab(a + b)(a - b)^2 \end{aligned}$$

Ez akkor nem negatív, ha $ab(a + b)$ nem negatív, ami pedig teljesül, ha sem a sem b nem negatív, továbbá akkor is, ha a és b különböző előjelűek, mégpedig közülük a nagyobb abszolút értékű negatív.

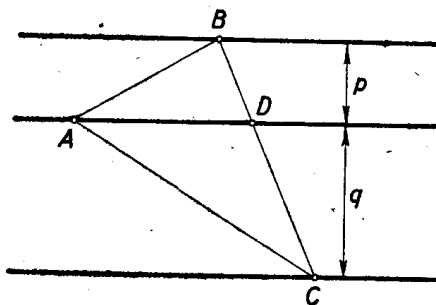
Megjegyzés: Azáltal, hogy ab , ill. $a + b$ -vel nem osztottunk, módunk nyílt a feladat követelményein túlmenő megállapításokat tenni. Természetes, ha csak a feladat állítását akarjuk bizonyítani, akkor lehet ab és $a + b$ -vel osztani, de akkor nem elég rámutatni, hogy az osztó $\neq 0$ -val, hanem az osztó előjele is lényeges; továbbá meg kell vizsgálni mindenkor, hogy egyenértékű átalakításokat végeztünk-e, vagy pedig megmutatni, hogy a nyert helyes eredményből visszafelé következtetve egyértelműen jutunk a kiinduláshoz. (Lásd a beszámoló zárómegjegyzéseit is.)

Kimutatás az 1954. évi Rákosi Mátyás matematikai verseny I. fordulójáról megyék és iskolafajok szerint

Megyék és Budapest	Beadott dolgozatok						Döntőbe került					
	Gimnázium		Ip. technikum		Összesen		Gimnázium		Ip. technikum		Összesen	
	i	t	i	t	i	t	i	t	i	t	i	t
1. Baranya	4	95	3	61	7	156	2	4	3	3	5	7
2. Bács-Kiskún ¹	9	87	1	9	10	96	5	8	1	2	6	10
3. Békés	10	133	1	15	11	148	–	–	1	2	1	2
4. Borsod	7	76	5	78	12	154	6	8	3	3	9	11
5. Csongrád	7	82	3	55	10	137	2	2	2	4	4	6
6. Fejér	2	29	3	35	5	64	2	4	1	1	3	5
7. Győr–Sopron	9	68	4	59	13	127	6	23	–	–	6	23
8. Hajdú–Bihar	9	109	3	46	12	155	5	16	2	2	7	18
9. Heves	3	55	1	3	4	58	2	7	1	1	3	8
10. Komárom	8	78	3	17	11	95	4	5	–	–	4	5
11. Nógrád	2	24	1	4	3	28	2	7	1	1	3	8
12. Pest	7	25	1	1	8	26	3	4	1	1	4	5
13. Somogy	4	52	1	22	5	74	2	3	–	–	2	3
14. Szabolcs–Szatmár	5	56	2	31	7	87	–	–	–	–	–	–
15. Szolnok	11	119	1	13	12	132	6	11	–	–	6	11
16. Tolna	5	86	–	–	5	86	4	7	–	–	4	7
17. Vas	7	109	–	–	7	109	5	7	–	–	5	7
18. Veszprém	6	98	2	52	8	150	4	9	2	2	6	11
19. Zala	2	32	–	–	2	32	2	2	–	–	2	2
Vidék	117	1413	35	501	152	1914	62	127	18	22	80	149
20. Budapest	40	726	17	256	57	982	32	119	11	19	43	138
Összesen	157	2139	52	757	209	2896	94	246	29	41	123	287

2. feladat. Adva van egy háromszög és három párhuzamos egyenes. Szerkesszünk olyan háromszöget, amely az adott háromszöghöz hasonló és csúcsai az adott egyeneseken vannak.

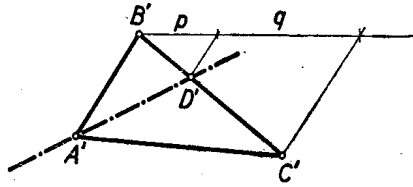
I. megoldás. Készítsünk vázlatot, a középső párhuzamos távolság a másik kettőtől legyen p és q , a középső egyenes messe BC -t a D pontban (a jelöléseket az 1. ábra mutatja). Ekkor nyilván $BD : DC = p : q$.



1. ábra

Ennek alapján a szerkesztés menete: az adott $A'B'C'$ háromszögben megszerkesztjük a $B'C'$ -t $p : q$ arányban osztó D' pontot (2. ábra).

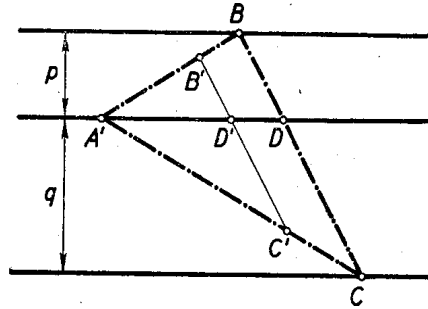
¹ A gimnáziumok közül 1 szakéretts. tanf. 8 tanulóval, akik közül 1 került a döntőbe



2. ábra

B' -ben és C' -ben párhuzamost húzunk $A'D'$ -vel, már a keresett ábrához hasonlót kapunk. Ezt kell szükség szerint nyújtani, vagy zsugorítani az adott egyeneseknek megfelelően.

Ez például úgy tehető meg, hogy a középső párhuzamos egyenesre rámásoljuk az $A'D'$ távolságot és e fölé mint közös oldal fölé, átmásoljuk a 2. ábrából a p , ill q szélességű síksáv oldalaira az $A'D'B'$, ill. $A'D'C'$ háromszögeket. Így egy az eredetileg megadott háromszöggel egybevágó $A'B'C'_\Delta$ -et nyerünk (3. ábra).



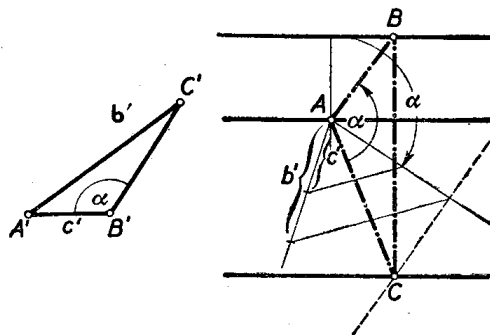
3. ábra

Messe az $A'B'$ oldal a p szélességű síksáv külső szélét B -ben, és húzzunk B -n át $B'C'$ -vel párhuzamost, amely az $A'D'$ -t D -ben, az $A'C'$ -t C -ben metszi. Az így nyert ABC_Δ az $A'B'C'_\Delta$ -nek az A' pontból $\frac{AB}{A'B'}$ arányban való nagyítása (ill. kicsinyítése) és $\frac{BD}{DC} = \frac{B'D'}{D'C'} = \frac{p}{q}$ miatt a C pont szükségképpen a q szélességű síksáv külső szélén fekszik. Tehát az ABC_Δ eleget tesz követelményeinknek.

Tetszés szerint választhatjuk ki, hogy melyik csúcs megfelelője melyik egyenesre essék, tehát $3! = 6$ -féle megoldás lehetséges. Az ezekből tükrözéssel és eltolással keletkező megoldások már mind egybevágóak e 6 háromszög valamelyikével s így nem adnak azoktól lényegesen különböző megoldást.

II. megoldás. A B pontot úgy vihetjük át C -be, hogy elforgatjuk A körül a $BAC \sphericalangle = B'A'C' \sphericalangle = \alpha$ szöggel és közben $\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'} = \frac{b'}{c'}$ arányban meg is nyújtjuk, (vagy rövidítjük, $A'B'C'$ legyen az adott háromszög). Mivel e mozgások adatai függetlenek a keresett megoldástól, a feladatot megoldhatjuk forgatva nyújtással.

Válasszunk pl. a középső egyenesen tetszőlegesen egy A pontot és e körül forgassuk el a felső egyenest $B'A'C' = \alpha$ szöggel és egyidejűleg nyújtsuk A -ból $A'C' : A'B' = b' : c'$ arányban (4. ábra).



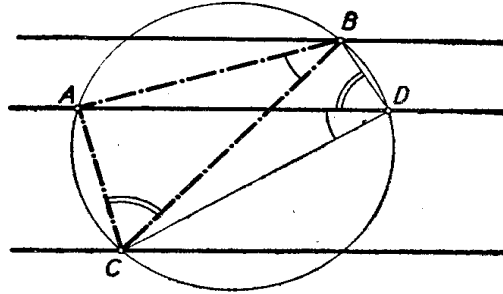
4. ábra

A kapott egyenes messe az alsó párhuzamost C -ben és szerkesszük meg a felső egyenes azon B pontját, mely a forgatva nyújtásnál C -be ment át. Az ABC_Δ A -nál lévő szöge és az ezt közrezáró oldalak aránya megegyezik az $A'B'C'$ háromszög megfelelő adataival, tehát valóban hasonló a két háromszög.

III. megoldás: Készítsünk vázlatot. Rajzoljuk meg a háromszög köré írt kört, messe ez a középső párhuzamost A -n kívül még a D pontban. Ekkor a kerületi szögek tétele szerint

$$\angle ADB = \angle ACB \quad \text{és} \quad \angle ADC = \angle ABC.$$

Ennek alapján a szerkesztés, ha az adott háromszög $A'B'C'$: a középső egyenes tetszés szerinti D pontjában rámérjük ezen egyenes egyik félegyenesének két oldalára az $A'C'B'$, ill. $A'B'C'$ szögeket (5. ábra).



5. ábra

Messék ezek a megfelelő párhuzamos egyenest B -ben, ill. C -ben. Mérjük rá végül BC -re C -ben a $B'C'A'$ -et BC ellenkező oldalára mint amelyiken D van. Messe ez a középső párhuzamost A -ban. Az AB távolsága C és D pontokból egyenlő szög alatt látszik, s így $ABCD$ húrnégyszög. Ebből következik, hogy $\angle ABC = \angle ADC = \angle A'B'C'$, tehát az ABC_{Δ} szögeiben megegyezik az adott $A'B'C'_{\Delta}$ -gel, s így hasonló hozzá.

3. feladat. Állítsunk merőlegest egy parabola érintőjére az érintési pontban, és ezt messük el a fókuszon átmenő, az érintővel párhuzamos egyenessel.

Mi a metszéspontok mértani helye, ha az érintési pont végigfut a parabolán?

I. megoldás. Válasszuk a parabola tengelyét x -tengelynek, csúcse érintőt y -tengelynek, ekkor a parabola egyenlete

$$y^2 = 2px.$$

Legyen a parabola x_1, y_1 pontja az érintési pont, akkor az érintő egyenlete

$$yy_1 = p(x + x_1),$$

ahol

$$y_1^2 = 2px_1,$$

azaz

$$x_1 = \frac{y_1^2}{2p}.$$

Így az érintési pontban emelt merőleges, ill. az $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ fókuszról az érintővel párhuzamosan húzott egyenes egyenlete

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p} \left(x - \frac{y_1^2}{2p}\right)$$

azaz

$$2py_1x + 2p^2y = y_1(y_1^2 + 2p^2)$$

illetve

$$y = \frac{p}{y_1} \left(x - \frac{p}{2}\right),$$

azaz

$$2px - 2y_1y = p^2.$$

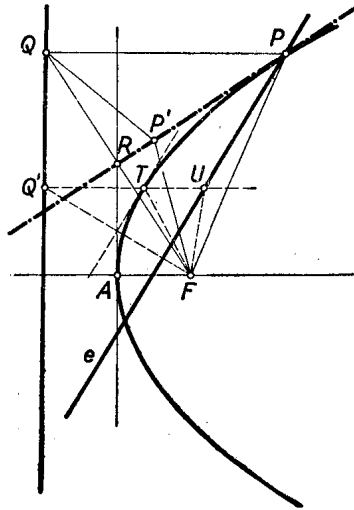
Innen kiküszöbölve y -t, ill. x -et

$$2p(y_1^2 + p^2)x = y_1^4 + 2p^2y_1^2 + p^4 = (y_1^2 + p^2)^2; \quad 2(p^2 + y_1^2)y = y_1(y_1^2 + p^2).$$

Oszthatunk $p^2 + y_1^2$ -tel, mert ez nem lehet 0 és y_1 -et kiküszöbölve kapjuk, hogy $2y = y_1$; $2px = y_1^2 + p^2 = 4y^2 + p^2$, azaz $y^2 = \frac{p}{2} \left(x - \frac{p}{2}\right)$; ez pedig olyan parabola egyenlete, melynek csúcspontja $\left(0, \frac{p}{2}\right)$, az eredeti parabola fókusza, paramétere pedig az eredeti parabola paraméterének negyedrésze.

A feladat megoldható koordináták és (ami lényegében ugyanazt jelentené) Pythagoras tételének felhasználása nélkül is. Ekkor a következő összefüggésekre lesz szükségünk: a parabola tetszés szerinti P pontjának a direktrixen legyen Q , ekkor a P pontban húzott érintő az FPQ szögfelezője, vagy ami ezzel egyenértékű, a parabola fókuszából az érintőkre bocsátott merőlegesek talppontjainak mértani helye, a parabola csúcserintője.

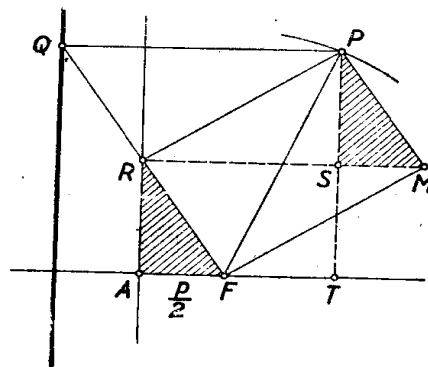
Valóban meghúzva az FPQ felezőjét (mely merőlegesen metszi QF -et a csúcserintőre eső R felezőpontban), erre $FP = PQ$, de az egyenes bármely más P' pontjára $FP' = P'Q$, az utóbbi távolság pedig nagyobb P' -nek a direktrixtől mért távolságánál (6. ábra).



6. ábra

Így az egyenesnek minden P -től különböző pontja a direktrixhez közelebb van, mint a fókuszhoz, tehát a parabola ugyanazon oldalára esik. Könnyen látható az is, hogy minden más P -n átmenő egyenesnek van pontja a parabolának mindkét oldalán². Így valóban e szögfelező a parabola érintője. Az ábra alapján fordítva is könnyű a csúcserintő bármely R pontjához megkeresni azt a P pontot a parabolán, melyben húzott érintőre F -ből merőlegest bocsátva annak talppontja, éppen R lesz.

II. megoldás: Legyen P -ből a direktrixre bocsátott merőleges talppontja Q , FQ felezőpontja R , az érintőre P -ben bocsátott merőleges és az F -ből az érintővel húzott párhuzamos metszéspontja M (7. ábra).



7. ábra

A segédtétel szerint FRP szög = 90° , tehát az $FMPR$ négyszög téglalap, így $MP \perp FR$, de akkor egyszersemind $MR \parallel PQ$. Bocsássunk P -ből merőlegest a parabola tengelyére; messe ez MR -t, ill. a tengelyt az S , ill. T pontban.

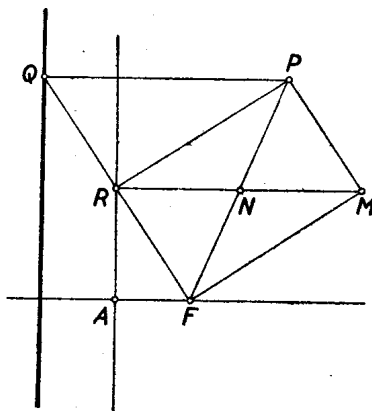
Ekkor az oldalak párhuzamossága és $MP = FR$ miatt, $MPS \triangle \cong FRA \triangle$, s így $PS = RA = \frac{1}{2}PT$, $MS = FA = \frac{p}{2}$.

Az M pontok mértani helye tehát az adott parabolából a következő módon keletkezik: először minden pontnak a parabola tengelyétől való távolságát felére csökkentjük, azután az így keletkezett görbét $\frac{p}{2}$ távolsággal eltoljuk. Az

²Legyen e egy PR -től különböző egyenes P -n át. Ennek azon felegyenesének pontjai mely P -ből indulva a direktrix és PR közti hegyes szögtérbe lép, könnyen láthatóan a fókuszról vannak távolabb, mint a direktrixtől, viszont messe az F -ből e -re bocsátott merőleges a direktrixet Q' -ben. Emeljünk Q' -ben a direktrixre merőlegest, messe ez FQ' felezőmerőlegesét, illetőleg e -t a T , ill. U pontban, akkor belátható, hogy $T'Q'$ és U közt van $FT = TQ'$ s így $FU < FT + TU = Q'T + TU = Q'U$, vagyis U a fókuszhoz van közelebb, mint a direktrixhez, tehát e átmetszi a parabolát.

utóbbi lépés a görbe alakját nem változtatja meg; az A pontot, mely az első lépésnél helyben marad, F -be viszi át. Az első lépésnél viszont a parabolából újabb parabola keletkezik, melynek a csúcsa és tengelye azonos az eredeti parabolával, paramétere pedig negyed-akkora. (L. jelen számunkban a 618. sz. feladatot.)

III. megoldás. Az $FMPR$ téglalap átlói egyenlők és felezik egymást, így RN , mint az $FPQ\Delta$ középvonala párhuzamos QP -vel, vagyis merőleges a csúcserintőre és $RN = NF$ (8. ábra), tehát az N pont olyan parabolát ír le, melynek az eredeti parabolával közös a fókuszusa, direktrixre pedig az eredeti parabola csúcserintője, tehát paramétere $\frac{p}{2}$.



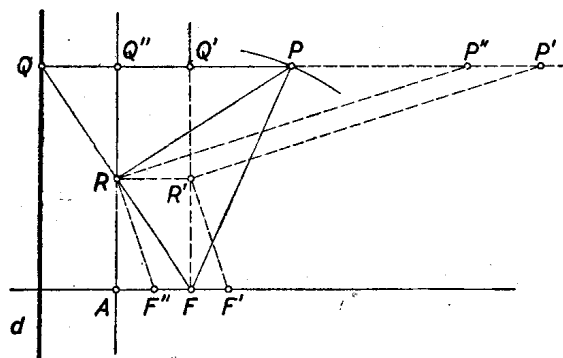
8. ábra

Minden egyes N pontból úgy nyerjük a megfelelő M pontot, hogy a csúcserintőtől való távolságát kétszeresre nyújtjuk. Ezzel ismét parabolát nyerünk, amelynek újra feleződik a paramétere, csúcsa pedig F -be kerül.

Megjegyzés: Felhasználtuk, hogy ha egy parabolát a direktrixtől egy irányban kétszeresen megnyújtunk, vagy ha ugyancsak egy irányban a tengelye felé $1/2$ arányban összehúzzuk, akkor ismét parabolát kapunk, mindkét esetben kisebb paraméterrel: előbbi esetben az eredeti paraméter fele, utóbbi esetben a negyede lesz az új paraméter. Ez azonban semmiképp sem magától értetődő, még csak az összes parabolák hasonlóságából sem következik. Legkönnyebb koordináták segítségével belátni. (Mellesleg az első megoldásban M koordinátáira adódó $x = \frac{1}{2p}(y_1^2 + p^2) = x_1 + \frac{p}{2}$,

$y = \frac{y_1}{2}$ is éppen a II. megoldásban elemien bizonyított összefüggéseket fejezi ki.) A II. és III. megoldásban viszont éppen a koordinátákat akartuk elkerülni, tehát csak akkor mondhatjuk, hogy ez sikerült, ha a fentebb említett tényeket is koordináták és Pythagoras tételének felhasználása nélkül tudjuk bizonyítani. Ez sem ütközik nehézségbe. A III. megoldásra vonatkozóan megmutatjuk, a II. megoldással kapcsolatos bizonyítást ennek alapján az olvasóra bízunk (l. a 618. feladatot).

Legyen d , A és F egy parabola direktrixe, csúcsa és fókuszusa; P egy pontja, Q annak vetülete d -n és legyen $QP' = 2QP$ (9. ábra).



9. ábra

Segéd-tételünk értelmében QF szakasz R felezőpontjára $PRF \sphericalangle = 90^\circ$ és R természetesen a csúcserintőn van. Ha P' valóban parabolát ír le, akkor ennek csúcsa az F pont kell, hogy legyen. Az ebben d -vel párhuzamosan húzott egyenes

³ Úgy is látható ez, hogy az S pontok az eredeti parabolának az F pontból felére kicsinyített képét alkotják.

messe a PQ egyenest Q' -ben, felezőpontja legyen R' . Ismét segédtefelünk értelmében elegendő azt megmutatni, hogy az R' -ben $P'R'$ -re bocsátott merőleges egy P' pont helyzetétől független F' pontban metszi az AF tengelyt.

Toljuk el $R'P'$ -t önmagával párhuzamosan úgy, hogy $R'R$ -be kerüljön. Ugyanez az eltolás vigye F' -t, P' -t, ill. Q' -t, F'' , P'' Q'' -be. Mivel $F'F'' = RR' = \frac{p}{2}$, független a P' pont helyzetétől, így elegendő azt megmutatni, hogy F'' helyzete is független. Tudjuk, hogy

$$QQ'' = RR' = P''P', \quad \text{amiből} \quad Q''P'' = 2Q''P.$$

Mivel

$$PRF \sphericalangle = P''RF'' \sphericalangle = 90^\circ,$$

így

$$PQ''R_\Delta \sim RAF_\Delta \quad \text{és} \quad P''Q''R_\Delta \sim RAF''_\Delta,$$

mert megfelelő oldalai páronként merőlegesek. Így

$$\frac{1}{2} = \frac{PQ''}{P''Q''} = \frac{PQ''}{Q''R} \cdot \frac{Q''R}{Q''P''} = \frac{RA}{AF} \cdot \frac{AF''}{RA} = \frac{AF''}{AF},$$

azaz

$$AF'' = \frac{1}{2}AF;$$

tehát AF'' és így a vele egyenlő FF' is független a P' ponttól és fele az eredeti parabola megfelelő adatának. P' tehát parabolát ír le, melynek paramétere feleakkora, mint az eredeti paraboláé, és ez volt a bizonyítandó.

*

A versenybizottság megállapításai közül röviden csak a következőket említjük meg a tanulóifjúság okulására: az 1. feladatban a formális számolást elég jól végezték, de a tanulók túlnyomó része még mindig tévesen így okoskodott: helyes következtetésekkel, helyes eredményre jutottunk, tehát a kiindulás helyes. A 2. feladat bizonyult legkönnyebbnek. Itt sokan használták fel az I. osztályú tankönyvet, vagy a K. M. L. 501. sz. feladat megoldását (1953 október), de – sajnos – igen sok megoldásnál hiányzik a szerkesztést indokoló szöveg és igen sok versenyző nem törődött a megoldások számával. A 3. feladat okozta a legtöbb nehézséget. Igen sok IV. osztályú tanuló hozzá sem fogott, amíg szép számmal akadt III. osztályú tanuló, aki – ha »nem is tanulta még a parabolát« – az $y = ax^2$ másodfokú függvény képéből oldotta meg a feladatot. Elég gyakoriak voltak az elemi megoldások is, bár itt sok, az ábrákból leolvasott, állítás maradt szigorú bizonyítás nélkül.

Egyébként a bizottság a III. osztályosok dolgozatainak elbírálásánál figyelembe vette, hogy az illető tanuló a koordinátageometriai órákon még nem tanult a paraboláról, bár a Rákosi versenyre komolyan készülő tanulóktól elvárható, hogy az osztályban elvégzett tananyagot túlmenően is érdeklődjenek a tankönyvből a tanév még hátralévő tananyaga iránt.