Tudjuk, hogy minden harmadfokú egyenlet visszavezethető

$$x^3 + px + q = 0$$

alakú egyenletre. Foglalkozzunk azzal az esettel, amikor mindhárom gyök valós. A baloldalt gyöktényezők szorzatára bontva

$$x^3 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

amiből

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \qquad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p, \qquad x_1x_2x_3 = -q. \tag{1}$$

Feltehetjük, hogy $|x_1| \geq |x_2| \geq |x_3|$. Ha mindhárom gyök megegyezik, akkor közös értékük, és így p és q is 0. Ezt a triviális esetet a továbbiakban zárjuk ki. Ekkor x_2 és x_3 előjele megegyezik és ellenkező, mint x_1 előjele; x_3 lehet 0 is. Az első egyenletet felhasználva a második így alakítható át:

$$p = x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3 = -x_1^2 + x_2x_3,$$

amiből látható az is, hogy p negatív, ha az egyenlet mindhárom gyöke valós.

Rajzoljunk ABC szabályos háromszöget $|x_1|$ hosszúságú oldalakkal és mérjük rá AB-re az $AD = |x_2|$ távolságot (ekkor $DB = |x_3|$). Azt fogjuk ekkor megmutatni, hogy $CD = \sqrt{-p}$.

Számítsuk ki CD-t cosinus-tétellel. Mivel $CAD\sphericalangle = 60°$, így

$$\begin{aligned} CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos CAD\sphericalangle = AC^2 + AD^2 - AC \cdot AD = \\ = AC^2 - AD(AC - AD) = AC^2 - AD(AB - AD) = \\ = AC^2 - AD \cdot DB = |x_1|^2 - |x_2||x_3|. \end{aligned}$$

Mivel x_2 és x_3 egyező előjelűek, $|x_2||x_3| = x_2x_3$, továbbá $|x_1|^2 = x_1^2$, így

$$CD^2 = x_1^2 - x_2x_3 = -p,$$

és ezt akartuk bizonyítani.