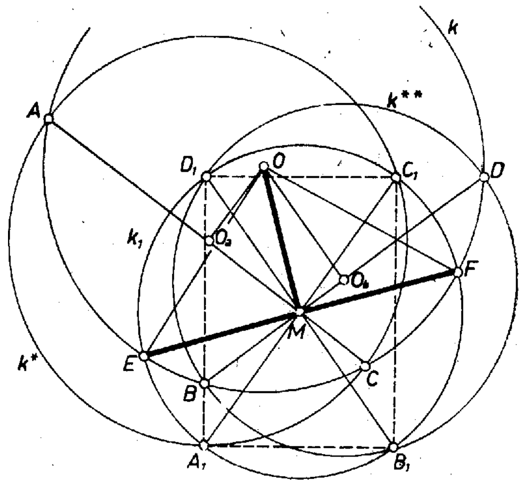
Csak olyan $ABCD = N$ négyszögekkel foglalkozunk, amelyben M és O különböző pontok, különben ugyanis N_1 az N elfordítottja O körül, 90°-kal, az *a)* állítás nyilvánvaló, *b)*-nek E, F pontjai pedig határozatlanok.



a) Az állításokat mindjárt térbeli elemek felhasználásával bizonyítjuk. Írjunk g gömböt O körül OA sugárral, így k a g-nek főköre. Messük g-t az N síkjára merőleges síkokkal AC-n és BD-n át a k_a, ill. k_b gömbi kis körökben. k_a-ban az AC szakasz átmérő, mert k_a-nak, O_a középpontja az O-ból az első síkra bocsátott merőleges egyenes talppontja, így benne van N síkjában, tehát a két sík AC metszésvonalában, másrészt A és C a k_a pontjai, hiszen rajta vannak g-n is és a mondott síkon is.

Eszerint k_a-t AC mint tengely körül N síkjába forgatva, ez egybeesik a feltevés szerint szerkesztett első, k^* körrel, és fordítva, k^*-ot AC körül N síkjára merőleges állásba forgatva, ez k_a-ba jut, vagyis g felületére. Továbbá A_1 és C_1 abba a két pontba, M_1-be és M_2-be jut, ahol az M-en átmenő és N síkjára merőlegesen álló egyenes g-t átdöfi. (M_1, M_2 létezik, mert M a k belsejében van, hiszen N konvex idom.) Az M_1M_2 szakaszt M felezi, mert N síkja g-nek szimmetriasíkja.

Értelemszerűen ugyanezek állnak rendre k_b-re, a feltevés szerint BD mint átmérő fölé szerkesztett körre, k^{**}-ra, és a B_1, D_1 pontpár merőlegesen elfordított helyzetére. Így pedig A_1 és C_1, valamint B_1 és D_1 új helyzete páronként egybeesik, mert egy egyenes g-t legföljebb 2 pontban metszi (hiszen az egyenesen és O-n átmenő sík főkört metszi ki g-ből és a döféspont ennek a körnek és az egyenesnek közös pontja). M mindkét forgástengelyben benne van, ezért $MA_1 = MC_1 = MM_1 = MM_2 = MB_1 = MD_1$, s mivel A_1, B_1, C_1, D_1 az N síkjában van, N_1 valóban húrnégyszög, a köréje írt k_1 kör középpontja M, és sugara MA_1:

b) Az M_1, M_2 pontpárt az OM egyenes körül N síkjába forgatva, ezek g-n mozdulnak el, hiszen a tengely átmegy O-n, ezért k kerületére jutnak; másrészt M-től mért távolságuk változatlan, hiszen M is a forgatás tengelyén van; tehát M_1 és M_2 a k_1 kerületére jutnak, vagyis E-be és F-be. És mivel OMM_1 derékszög, azért $OME\sphericalangle$ és $OMF\sphericalangle$ is derékszögek, $EF \perp OM$, amint a feladat állítja.

c) Összefoglalva: N_1 húrnégyszög voltának, valamint EF és OM merőleges helyzetének az a térbeli értelmezése, hogy az A_1, B_1, C_1, D_1, E, F pontok a fönti M_1, M_2 pontpárnak 3 különböző módon az N síkjába való forgatásával álltak elő, és hogy mindhárom forgatás tengelye átmegy M-en.

Megjegyzések. 1. A feladat állításai síkbeli meggondolással is bizonyíthatók.

a) Legyen az AC és BD átmérő fölé írt kör ismét k^*, ill. k^{**}. A_1C_1 és AC a k^*-nak egymást M-ben metsző szelői, ugyanez áll AC-re és BD-re a k-ban, BD-re és B_1D_1-re a k^{**}-ban, így a szelők szeleteinek tétele alapján

$$MA_1 \cdot MC_1 = MA \cdot MC = MB \cdot MD = MB_1 \cdot MD_1. \tag{1}$$

Másrészt A_1 és C_1, valamint B_1 és D_1, egymás tükrös párjai az őket származtató AC, ill. BD átlóra, ezért $MC_1 = MA_1$, $MD_1 = MB_1$, és így (1) alapján $MB_1 = MA_1$, e 4 szakasz egyenlő, N_1 téglalap és a középpontja M.

b) EF, mint k és k_1 közös húrjának egyenese, nyilvánvalóan merőleges a két kör középpontját összekötő egyenesre.

2. A fenti, térbeli bizonyításban azt is kaptuk, hogy az EF egyenes átmegy M-en, OME derékszögű háromszög. Ez – a síkra szorítkozva – Pitagorasz tételének megfordítása alapján látható be, az eredeti tételt az OO_aM, O_aA_1M és OO_aA derékszögű háromszögekre alkalmazva.

3. A *c)* kérdésre érkezett válaszok legtöbbje nem értelmezést adott, hanem térbeli kiterjesztést, általánosítást keresett.