I. megoldás. $m \neq 0$ miatt $v \neq 0$, és így mindig fennáll $y \neq 0$, másrészt $u \neq 0$. A kifejezések mindig értelmezve vannak, mert közös nevezőjük nem kisebb, mint v^2, ami pedig pozitív. (1) alapján

$$x+1=\frac{2(1-u)}{(1-u)^2+v^2}, \tag{3}$$

ezt (2)-vel osztva

$$\frac{x+1}{y}=\frac{1-u}{v}=\frac{1-u}{mu},$$

és innen mindig

$$u=\frac{y}{y+m(x+1)}, \qquad v=\frac{my}{y+m(x+1)}, \tag{4}$$

ugyanis a nevező nem tűnik el, mert (2) és (3) alapján

$$y+m(x+1)=\frac{2m}{(1-u)^2+v^2}\neq 0.$$

Ezekre támaszkodva könnyen megkapjuk x, y és m kívánt alakú összefüggését. (4) alapján

$$1-u=\frac{m(x+1)}{y+m(x+1)},$$

és így (2)-nek

$$(1-u)^2+v^2=\frac{2v}{y}$$

átrendezett alakjából:

$$\frac{m^2(x+1)^2}{\left[y+m(x+1)\right]^2}+\frac{m^2y^2}{\left[y+m(x+1)\right]^2}=\frac{2m}{y+m(x+1)},$$

$$(x+1)^2+y^2=\frac{2}{m}\left[y+m(x+1)\right],$$

$$x^2+\left(y-\frac{1}{m}\right)^2=1+\frac{1}{m^2}. \tag{5}$$

Ez kör egyenlete, melynek K középpontja és r sugara:

$$K\left(0,\frac{1}{m}\right), \qquad r=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}.$$

Kizártuk azonban az $y=0$ értéket, amelyhez (5) alapján $x=\pm 1$ tartozik, ennélfogva a kérdéses vonal a mondott kör, az x tengelyen levő $(1,0)$ és $(-1,0)$ metszéspontok kihagyásával (a körnek az x tengely fölötti és alatti íve).

Megjegyzések. 1. Megkaphatjuk (5)-öt a következő meggondolással is. A kérdéses vonal minden pontjához tartozik az u, v paramétereknek legalább egy, az előírások szerinti értékpárja, ill. a $v=mu$ összefüggésnek és m állandó voltának figyelembevételével legalább egy u érték. Erre a pont mindkét koordinátája alapján $2-2$ érték jön szóba, mert (1)-ből és (2)-ből u szerinti rendezéssel (ami a föltevések szerint ekvivalens átalakítás):

$$(1+m^2)(x+1)u^2-2xu+(x-1)=0, \tag{6}$$

$$(1+m^2)yu^2-2(m+y)u+y=0. \tag{7}$$

Ez azt jelenti, hogy (6)-nak és (7)-nek van közös gyöke.

Várható, hogy ilyen esetben a két egyenlet együtthatói között összefüggés áll fenn, hiszen tetszés szerinti együtthatók esetén két másodfokú egyenlet $2-2$ gyöke között nem várhatók egyenlők. Ezt az összefüggést keressük meg az,

$$a_1z^2+b_1z+c_1=0,$$

$$a_2z^2+b_2z+c_2=0$$

egyenlet-pár esetére, majd alkalmazzuk feladatunkra. Legyen közös gyökük z_1, ekkor fennáll

$$a_1z_1^2+b_1z_1+c_1=0, \tag{8}$$

$$a_2z_1^2+b_2z_1+c_2=0. \tag{9}$$

Először z_1^2, majd z_1 kiküszöbölésével (azaz (8)-at $-a_2$-vel, (9)-et a_1-gyel, majd b_2-vel, ill. $-b_1$-gyel szorozva és összeadva)

$$(a_1b_2 - a_2b_1)z_1 + (a_1c_2 - a_2c_1) = 0,$$
$$(a_1b_2 - a_2b_1)z_1^2 + (c_1b_2 - c_2b_1) = 0.$$

Mármost az elsőből

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 z_1^2 = (a_2c_1 - a_1c_2)^2,$$

a másodikat $a_1b_2 - a_2b_1$-gyel szorozva és a kapott összefüggést felhasználva:

$$(a_2c_1 - a_1c_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)(c_1b_2 - c_2b_1) = 0. \tag{10}$$

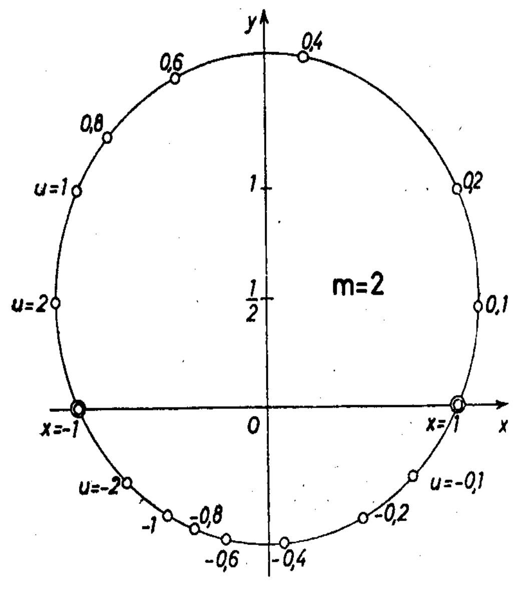
Ez a keresett összefüggés, közös gyökkel bíró két másodfokú egyenlet együtthatói között.

Esetünkben (6) és (7) együtthatóival (10) alapján:

$$4(1+m^2)^2y^2 + 4(1+m^2)\left[y + m(x+1)\right]\left[m(x-1) - y\right] = 0,$$

ami ismét (5)-re vezet.

2. Sejtést kaphatunk a kérdéses vonalra vonatkozóan néhány pontjának ábrázolásával is. Az 1. ábrán $m = 2$ esetére az $u = \pm 0{,}1$, $\pm 0{,}2$, $\pm 0{,}4$, $\pm 0{,}6$, $\pm 0{,}8$, ± 1, ± 2 értékekkel kapott pontok kört rajzolnak ki.



1. ábra

II. megoldás. Az előző megoldás (3) és (2) formulájában a jobb oldalak számlálói a nevezőkben szereplő négyzetek alapjai. Így a két kifejezés négyzetét összeadva egyszerűsíteni lehet:

$$(x+1)^2 + y^2 = \frac{4}{(1-u)^2 + v^2}, \quad \text{vagy}$$
$$\left[(x+1)^2 + y^2\right]\left[(1-u)^2 + v^2\right] = 4.$$

Ennek geometriai értelmet adhatunk, ha u-t, v-t is koordinátáknak fogjuk fel. A két tényező még szimmetrikusabbá válik, ha a $\xi = -u$, $\eta = v$ koordinátákkal meghatározott R pontot tekintjük. Ehhez az

$$x = \frac{1 - \xi^2 - \eta^2}{(\xi+1)^2 + \eta^2}, \tag{1*}$$

$$y = \frac{2\eta}{(\xi+1)^2 + \eta^2} \tag{2*}$$

összefüggés egy P (x, y) pontot rendel, az R_0 $(-1, 0)$ pont kivételével, amire az (1*), (2*) formuláknak nincs értelme. Fönt nyert összefüggésünk pedig az

$$\left[(x+1)^2 + y^2\right]\left[(\xi+1)^2 + \eta^2\right] = 4$$

alakot nyeri, amiből pontjaink távolságára az

$$R_0P \cdot R_0R = 2 \tag{11}$$

összefüggés következik. A (3) és (2*) összefüggéseket

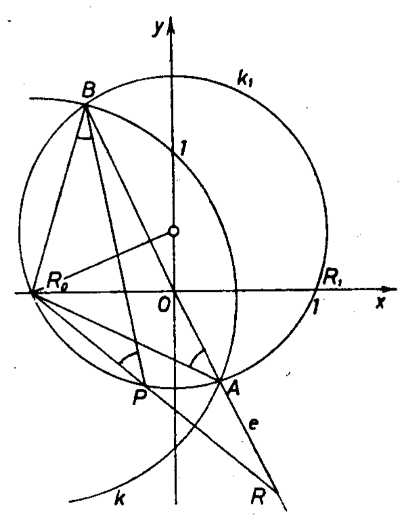
$$x+1=\frac{2}{R_0R^2}\,(\xi+1), \tag{3*}$$

$$y=\frac{2}{R_0R^2}\,\eta \tag{2*}$$

alakban írhatjuk, vagyis $x+1$, y, a $\xi+1$-ből, ill. η-ból ugyanazzal a pozitív tényezővel való szorzás útján keletkezik, tehát P és R egy az R_0-ból induló félegyenesen van. Ezzel leírtuk geometriailag azt a transzformációt, amely az (1*), (2*) képleteknek megfelelően rendeli minden az R_0-tól különböző $R(\xi,\eta)$ ponthoz a P (x,y) pontot. Ennél a transzformációnál speciálisan azok az R pontok önmaguknak felelnek meg, amelyekre $R_0R=\sqrt{2}$, vagyis az R_0 középpontú, $r=\sqrt{2}$ sugarú k kör pontjai és más pont nem.

Ha a feladat feltételei teljesülnek, és $u\neq 0$, akkor $\eta/\xi=-v/u=-m\neq 0$ is állandó, tehát az ilyen pontok egy-egy, az origón átmenő és az x, y tengelyektől különböző egyenesen vannak. Így a feladatot geometriailag a következővé alakítottuk át: A leírt transzformáció mibe visz át egy a k kört két pontban metsző, annak R_0 középpontján nem átmenő, tetszőleges e egyenest?

Legyenek e és k metszéspontjai A és B, R legyen az e tetszőleges, az A, B pontoktól különböző pontja, és P az R_0R félegyenes azon pontja, amelyre (11) teljesül (2. ábra).



2. ábra

Feltehetjük, hogy R a BA félegyenesen van. Az R_0BR és R_0PB háromszögek R_0-nál levő szöge közös és e szög szárain levő oldalakra (11) alapján

$$R_0B : R_0R = R_0P : R_0B,$$

e két háromszög tehát hasonló, így

$$R_0BR\sphericalangle = R_0PB\sphericalangle.$$

Az ABR_0 háromszög egyenlő szárú, tehát $R_0BR\sphericalangle = R_0AB\sphericalangle$, így az R_0B szakasz az A és P pontokból egyenlő szög alatt látszik, P tehát rajta van az ABR_0 háromszög köré írható k_1 körön. Megfordítva: a k_1 kör tetszőleges, R_0-tól különböző P pontjához van olyan R pontja e-nek, melyet transzformációnk éppen P-be visz. Valóban, messe az R_0P egyenes e-t R-ben. R-hez az előbbiek szerint a transzformáció a k_1 kör és az R_0R egyenes R_0-tól különböző metszéspontját, vagyis P-t rendeli hozzá.

Visszatérve a koordináta-rendszerbe, az origón átmenő, $-m$ meredekségű egyenesek képe a fentiek alapján egy k_1 kör lesz, mely átmegy az R_0 ponton és az origó képén, az $R_1(+1,\,0)$ ponton. Mivel az R_0R_1 szakasz felező merőlegese, az y tengely, k_1-nek átmérője, azért k_1 középpontja is az y tengelyen van. Mint láttuk, k_1-nek az eredeti e egyenesre merőleges, R_0-on átmenő egyenes is átmérője, a középpont tehát az R_0-on átmenő, $\left(+\dfrac{1}{m}\right)$ meredekségű egyenesnek az y tengellyel alkotott metszéspontja, azaz a $\left(0,\ \dfrac{1}{m}\right)$ koordinátájú pont; így k_1 sugara

$$r=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}},$$

és egyenlete:

$$x^2+\left(y-\frac{1}{m}\right)^2=1+\frac{1}{m^2}.$$

Eleve nem tartozik k-hoz a kivételes R_0 pont, és mivel a $v/u = m \neq 0$ feltétellel az origót is kizártuk, ennek képe, az R_1 pont sem tartozik az (1), (2) egyenletekkel leírt görbéhez. A fentiekből viszont következik, hogy k_1 minden más pontja az (1)–(2) görbéhez tartozik.

(Tusnády Gábor)