

Ismert azonosságok alapján a bal oldalt szorzattá, a jobb oldalt hányadossá, majd tovább alakítva (1) így írható:

$$2 \cos x \cos 2x = \frac{\sin 4x}{2 \cos 4x} = \frac{\sin 2x \cos 2x}{\cos 4x} = \frac{2 \sin x \cos x \cos 2x}{\cos 4x},$$

és a két oldal különbségét szorzattá alakítva

$$2 \cos x \cos 2x \left( 1 - \frac{\sin x}{\cos 4x} \right) = 0.$$

Ez teljesül, ha

$$\begin{aligned} \cos x &= 0, & \text{azaz } x_1 &= (2k - 1) \cdot 90^\circ, \text{ és ha} \\ \cos 2x &= 0, & \text{azaz } x_2 &= (2k - 1) \cdot 45^\circ \end{aligned}$$

(ugyanis a nevező mindkét esetben 0-tól különböző); továbbá akkor, ha

$$\frac{\sin x}{\cos 4x} = 1, \quad \sin x = \cos 4x = \sin(90^\circ - 4x).$$

Ez akkor áll fenn, ha

$$\begin{aligned} x - (90^\circ - 4x) &= k \cdot 360^\circ, \text{ és ha} \\ x + (90^\circ - 4x) &= (2k + 1)180^\circ, \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} x_3 &= (4k + 1) \cdot 18^\circ = 18^\circ + k \cdot 72^\circ, \\ x_4 &= 30^\circ - (2k + 1) \cdot 60^\circ = -30^\circ + k \cdot 120^\circ = (4k - 1) \cdot 30^\circ \end{aligned}$$

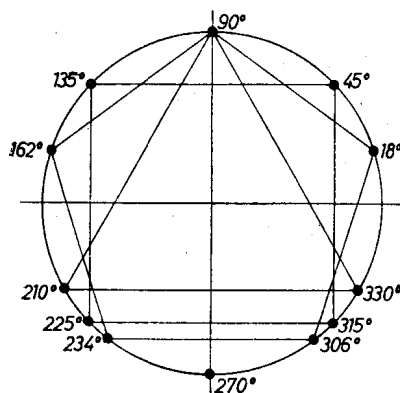
(mindegyik megoldásban  $\cos 4x \neq 0$ ).

Mindezek szerint a  $0^\circ, 360^\circ$  intervallumban (1)-et a következő értékek elégítik ki:

$$x = 18^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 162^\circ, 210^\circ, 225^\circ, 234^\circ, 270^\circ, 306^\circ, 315^\circ, 330^\circ$$

(és ha  $x$  kielégíti az egyenletet, akkor  $x + k \cdot 360^\circ$  is kielégíti).

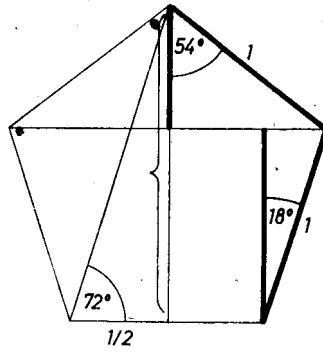
A megfelelő szög mozgó szárának az egységkörrel való metszéspontját feltüntetve annak a szabályos ötszögnek és háromszögnek csúcsait kapjuk, melyeknek, egy-egy csúcsa az  $y$  tengely pozitív felén van, továbbá annak a négyzetnek a csúcsait, melynek oldalai párhuzamosak a tengelyekkel, végül az  $y$  tengelyen levő átmérő másik végpontját (1. ábra).



1. ábra

Závoti József (Székesfehérvár, Ybl M. Gimn., IV. o. t.)

*Megjegyzés.*  $x = 18^\circ$  esetére (1) mindegyik tagja pozitív, az egyenlőség két oldalán a szabályos ötszög szimmetria-tengelyének kétféle kifejezése áll (2. ábra).



2. ábra