I. megoldás. Legyen az egyik gyökpár α és $-\alpha$, a másik β és $-\beta$ (föltehetjük, hogy $\alpha,\ \beta>0$, hiszen $x=0$ nem elégíti ki (1)-et), és a hátra levő két gyök γ, δ. Ekkor (1) bal oldala mint gyöktényezők szorzata:

$$(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)(x-\gamma)(x-\delta)=$$
$$=[x^4-(\alpha^2+\beta^2)x^2+\alpha^2\beta^2][x^2-(\gamma+\delta)x+\gamma\delta], \tag{2}$$

és a két kifejezés azonos volta alapján

(3) x^5 együtthatójából $-(\gamma+\delta)=-2,$

(4) x^4 együtthatójából $\gamma\delta-(\alpha^2+\beta^2)=-9,$

(5) x^3 együtthatójából $(\alpha^2+\beta^2)(\gamma+\delta)=14,$

(6) x^2 együtthatójából $-\gamma\delta(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2\beta^2=24,$

(7) x együtthatójából $-\alpha^2\beta^2(\gamma+\delta)=-20,$

(8) x^0 együtthatójából $\alpha^2\beta^2\gamma\delta=-20.$

Óvatosságra int, hogy a (2)-ben szereplő 4 együtthatóra 6 egyenletet kaptunk.

(5)-öt és (7)-et (3)-mal osztva $\alpha^2+\beta^2=7$ és $\alpha^2\beta^2=10$, az utóbbival (8)-at osztva $\gamma\delta=-2$. Ezekkel a föl nem használt (4) és (6) teljesülnek. Továbbmenve

$$\alpha^2,\ \beta^2 \text{ értéke } 2 \text{ és } 5, \gamma \text{ és } \delta \text{ értéke } 1+\sqrt{3} \text{ és } 1+\sqrt{3},$$

és így az egyenlet gyökei:

$$\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ -\sqrt{5},\ 1+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3},$$

Csetényi Artur (Kiskunhalas, Szűcs J. Ált. Isk., 8. o. t.)

II. megoldás. A fenti jelöléseket tovább használjuk. α és $-\alpha$ kielégíti (1)-et, tehát

$$\alpha^6-2\alpha^5-9\alpha^4+14\alpha^3+24\alpha^2-20\alpha-20=0,$$
$$\alpha^6+2\alpha^5-9\alpha^4-14\alpha^3+24\alpha^2+20\alpha-20=0,$$

eszerint α csak olyan szám lehet, amely e két egyenlőség különbségét is kielégíti:

$$4\alpha(\alpha^4-7\alpha^2+10)=0.$$

Nem lehet azonban $\alpha=0$, mert ez nem gyöke (1)-nek. A leválasztással adódó

$$\alpha^4-7\alpha^2+10=0$$

egyenletből valamilyen sorrendben α^2, β^2 értéke 2 és 5, de sorrendjük lényegtelen.

A megtalált gyökökhöz tartozó gyöktényezők $(x^2-2)(x^2-5)=x^4-7x^2+10$ szorzatával (1) bal oldala (maradék nélkül) osztható és a hányados x^2-2x-2. Ez azt jelenti, hogy $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$ és $x_{3,4}=\pm\sqrt{5}$, valóban gyöke (1)-nek, a további gyökök pedig az

$$x^2-2x-2=0 \tag{9}$$

egyenletből $x_{5,6}=1\pm\sqrt{3}$.

Kóczy László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

III. megoldás Legyen továbbra is az egyik gyök pár α és $-\alpha$, és mint láttuk, $a\neq 0$, így (1) bal oldala osztható a megfelelő gyöktényezők

$$(x-\alpha)(x+\alpha)=x^2-\alpha^2=x^2-a$$

szorzatával, ahol $a=\alpha^2$. Ezt fogjuk meghatározni. Az osztást végrehajtva a $h(x)$ hányados- és az $m(x)$ maradékpolinom:

$$h(x)=x^4-2x^3+(a-9)x^2+(14-2a)x+(24-9a+a^2), \tag{10}$$
$$m(x)=(-20+14a-2a^2)x+(-20+24a-9a^2+a^3).$$

Az utóbbinak azonosan 0-nak kell lennie, tehát a olyan szám, amelyre egyidejűleg teljesül:

$$-20+14a-2a^2=0, \tag{11}$$

$$20+24a-9a^2+a^3=0. \tag{12}$$

(11) gyökei $a_1=2$ és $a_2=5$, és mindkettő a (12)-nek is gyöke. Ezzel ismét meg kaptuk (1)-nek $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{5}$ gyökeit és a II. megoldás befejezése szerint haladunk tovább.

Megjegyzések. 1. Ha (1)-ből a gyök-párokat egyenként választjuk le, az első osztás hányadosát (10)-ből kapjuk $a=2$ (vagy $a=5$) helyettesítéssel.

2. Magyarázza meg az olvasó a (11) bal oldala és a (9)-hez vezető osztó közti kapcsolatot.