

Legyen a keresett pont $P_0(x_0, y_0)$, és erre a $P(x, y)$ pontot tükrözve a $P'(x', y')$ pontot kapjuk. Ekkor a PP' szakasz felezőpontja P_0 ezért

$$\frac{x + x'}{2} = x_0 \quad \text{és} \quad \frac{y + y'}{2} = y_0,$$

tehát

$$(2) \quad x' = 2x_0 - x, \quad y' = 2y_0 - y.$$

A követelmény szerint, ha tetszés szerinti x esetén P rajta van az (1) egyenletű görbén, akkor P' -nek is rajta kell lennie, azaz

$$y' = x'^3 + ax'^2 + bx' + c.$$

Ide (2)-t, majd (1)-et behelyettesítve, rendezés után

$$\begin{aligned} 2y_0 - y &= 2y_0 - x^3 - ax^2 - bx - c = (2x_0 - x)^3 + a(2x_0 - x)^2 + b(2x_0 - x) + c, \\ 2(a + 3x_0)x^2 - 4x_0(a + 3x_0)x + 2(4x_0^3 + 2ax_0^2 + bx_0 + c - y_0) &= 0. \end{aligned}$$

Ez csak úgy állhat fenn bármely x esetén, ha minden együttható 0. Az első együttható 0, ha

$$x_0 = -\frac{a}{3},$$

és ekkor a második is 0. A harmadik együttható eltűnéséből pedig, x_0 talált értékét behelyettesítve

$$y_0 = 4x_0^3 + 2ax_0^2 + bx_0 + c = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c.$$

Eszerint a görbének a $P_0(x_0, y_0)$ pontra vett tükörképe önmaga. Még csak azt kell belátnunk, hogy P_0 rajta van a görbén. Valóban, a talált $x_0 = -a/3$ abszcissza esetében a görbepont ordinátája

$$y = \left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(-\frac{a}{3}\right) + c = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = y_0$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Gulyás Imre (Budapest, Piarista Gimn., III. o. t.)