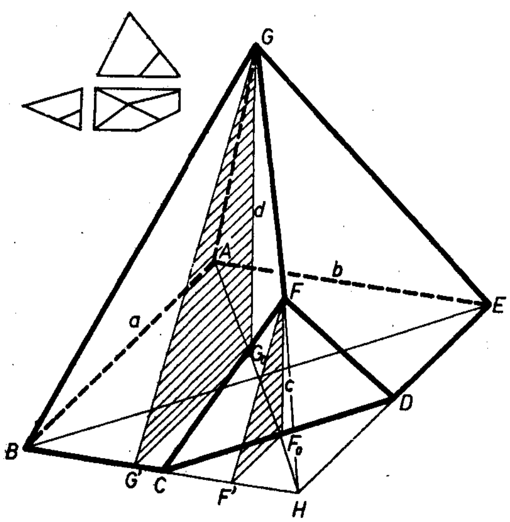
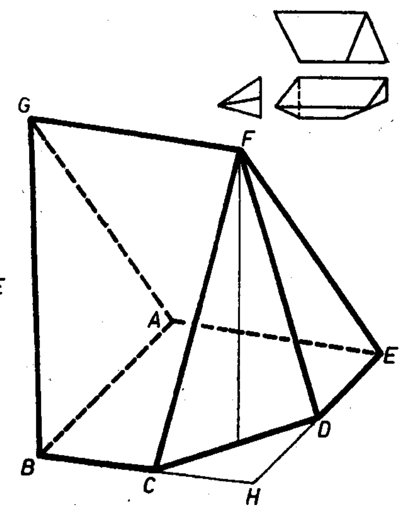
**I.** Tekintsük az említett $ABCDE$ ötszöglapot a $P$ poliéder alaplapjának úgy, hogy $AB = a$, $AE = b$, $DE = a/2$, ekkor $BC = b/2$. A további lapok száma 5, így mindegyiküknek van éle az alapon, és az alapsíkra merőleges lap a $CD$ élhez kapcsolódik; legyen ennek harmadik csúcsa $F$, a hátra levő 7. csúcs pedig $G$.

A $CB$ és $DE$ alapélre támaszkodó oldallapoknak a konvexség miatt át kell menniük $F$-en. $P$ további vizsgálata aszerint alakul, hogy $F$-ben csak a mondott 3 lap metszi egymást, vagy még további lap is.

Ha $F$ 3-lapú csúcs – azaz egyszersmind 3-élű is –, akkor $P$-nek $F$-ből kiinduló harmadik élét az $FCB$, $FDE$ oldallapsíkok metszésvonala tartalmazza (1. ábra). A metszésvonal az alaplap síkját a $BC$, $ED$ egyenesek metszéspontjában, a téglalap lemetszett $H$ csúcsában döfi át, másrészt átmegy $G$-n, hiszen az 5 alapcsúcs egyikén sem mehet át. E metszésvonalnak egyetlen pontja van az alap fölött $d$ magasságban, eszerint $G$ egyértelműen meg van határozva, hacsak $d > c$, hiszen a konvexség miatt $G$-nek a $CDF$ sík $A$-t tartalmazó oldalán kell lennie, vagyis a $HF$ szakasz $F$-en túli meghosszabbításán. – Ezek szerint az $F$-ben összefutó lapok a $BCFG$, $EDFG$ négyszögek, a hátra levő 2 lap pedig a konvexség alapján az $ABG$ és $AEG$ háromszög. Ebben az esetben $P$-t az $ABHEG$ gúlából is származtathatjuk a $HCDF$ gúla lemetszése útján.



*1. ábra*



*2. ábra*

Amennyiben $F$ a poliéder további oldallapjának is csúcsa – ti. az alaphoz a $BC$, $CD$, $DE$ élen kapcsolódó lapokon túl –, ez csak az egyik lehet az alaphoz a hátra levő $EA$ és $AB$ élen kapcsolódó lapok közül, különben ugyanis a keletkező konvex poliéder ötoldalú gúla lenne, és nem lehetne 7. csúcsa. Elég azt az esetet tekintenünk, ha az $F$-en átmenő negyedik oldallapsík az $EA$ élen kapcsolódik, hiszen a másik lehetőség ebbe megy át a $B$, $E$ és $C$, $D$ betű-párok egyidejű fölcserélésével, és ez a fölcserélés az alapidom tulajdonságait változatlanul hagyja (2. ábra).

Ekkor az $F$-ben összefutó 4 lapsík egymásutánja (3–3 ponttal meghatározva) $FBC$, $FCD$, $FDE$, $FEA$, és így az utolsó lap az első laphoz élben csatlakozik. S mivel e két sík tartalmazza a téglalap szemben fekvő, tehát párhuzamos $BH$, $AE$ oldalegyenesét, azért az $F$-en áthaladó metszésvonaluk is párhuzamos ezekkel, és így az alap síkjával is. Ezen kell lennie $G$-nek, ilyen megoldás tehát csak $d = c$ esetén lehetséges, és megfordítva: e feltétel mellett nincs is más megoldás.

Így azonban $G$-ként szerepelhet az $F$-ből kiinduló és $EA$-val egyirányú félegyenes bármely pontja, tehát $P$ nincs egyértelműen meghatározva.

II. $P$ felszínének és térfogatának kérdését csak az előbbi (azaz $d > c$ feltételű) esetben vizsgálhatjuk (1. ábra).

$P$ térfogata, mint az $ABHEG$ és $CHDF$ gúlák térfogatának különbsége

$$V = \frac{abd}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{3} = \frac{ab}{24}(8d - c).$$

a numerikus adatokkal 4625 térfogategység.

III. A $GFCB$, $GFDE$ lapok területét szintén a lemetszésre támaszkodva számítjuk. Legyen $G$ és $F$ vetülete a $BC$ egyenesen $G'$, $F'$, az alaplap síkján $G_0$, $F_0$, a legutóbbi felezi a $CD$ alapélt, ennélfogva negyedeli a téglalap $HA$ átlóját, így pedig a fentiek szerint $G_0$ is rajta van az átlón. Ezért $GG'G_0$ és $FF'F_0$, valamint $HG'G_0$ és $HF'F_0$ hasonló háromszögek, így $G_0$-nak a $BC$, $ED$ egyenestől való távolsága

$$G_0G' = \frac{d}{c} \cdot F_0F' = \frac{ad}{4c}, \qquad G'H = \frac{d}{c} \cdot F'H = \frac{bd}{4c},$$

ennélfogva az $AE$, $AB$ egyenestől való távolsága

$$\left|\frac{ad}{4c}-a\right|=\frac{a}{4c}\cdot|\,d-4c\,|,$$
$$\left|\frac{bd}{4c}-b\right|=\frac{b}{4c}\cdot|\,d-4c\,|.$$

Így a $GBH$, $GHE$, $GEA$, $GAB$ oldalháromszög magassága:

$$(GG'=)\frac{d}{4c}\cdot\sqrt{a^2+16c^2},\qquad \frac{d}{4c}\cdot\sqrt{b^2+16c^2},$$
$$\sqrt{\frac{a^2}{16c^2}\left(d-4c\right)^2+d^2},\qquad \sqrt{\frac{b^2}{16c^2}\left(d-4c\right)^2+d^2},$$

és hasonlóan az $FCH$, $FHD$ háromszög $F$-ből induló magassága

$$\frac{1}{4}\sqrt{a^2+16c^2},\qquad \frac{1}{4}\sqrt{b^2+16c^2}.$$

$P$ felszínét most már úgy kapjuk, hogy e 6 magasságot rendre megszorozzuk a megfelelő alap felével: $b/2$-vel, $a/2$-vel, $b/2$-vel, $a/2$-vel, $(-b/4)$-gyel, $(-a/4)$-gyel, és e szorzatok összegéhez hozzáadjuk a $CDF$ háromszög és az alaplap területének összegét. Alkalmas összevonásokkal:

$$F_P=\frac{b}{16c}(2d-c)\sqrt{a^2+16c^2}+\frac{a}{16c}(2d-c)\sqrt{b^2+16c^2}+$$
$$+\frac{b}{8c}\sqrt{a^2(d-4c)^2+16c^2d^2}+\frac{a}{8c}\sqrt{b^2(d-4c)^2+16c^2d^2}+\frac{c}{4}\sqrt{a^2+b^2}+\frac{7}{8}\,ab.$$

A számadatokkal $F_P=1851{,}6$ területegység.

*Nagy András* (Budapest, Toldy F. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján.

*Megjegyzés.* $d=4c$ esetén $G_0$ az $A$ csúcsba esik, és $F_P$ képlete némileg egyszerűbbé válik.