Alábbiakban közöljük a kitűzött feladatok megoldásait.

Az I. forduló feladatai

1. *feladat: Számítsuk ki* $(x+y+z)^2$ *értékét, ha*

$$2x(y+z)=1+yz, \qquad \frac{1}{x}-\frac{2}{y}=\frac{2}{3} \quad \text{és} \quad x+y+\frac{1}{z}=0.$$

I. megoldás: A változók egyike sem lehet 0, így a törtek eltávolíthatók és a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$2xy+2xz-yz=1, \qquad 3xy+2xz-yz=0, \qquad xz+yz=-1.$$

Ez elsőfokú egyenletrendszer, ha xy, xz, yz-t tekintjük ismeretlennek. A második egyenletet levonva az elsőből, majd az egymásutáni egyenleteket 3, -2, 1-gyel, végül pedig 3, -2, -2-vel szorozva és összeadva kapjuk sorra, hogy

$$xy=-1, \qquad xz=\frac{2}{3}, \qquad yz=-\frac{5}{3}.$$

Innen

$$x^2=\frac{xy\cdot xz}{yz}=\frac{2}{5} \quad y^2=\frac{xy\cdot xy}{xz}=\frac{5}{2}, \quad z^2=\frac{xz\cdot yz}{xy}=\frac{10}{9}.$$

Ezeket felhasználva

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=$$
$$=\frac{2}{5}+\frac{5}{2}+\frac{10}{9}+2\left(-1+\frac{2}{3}-\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{90}.$$

II. megoldás: A harmadik egyenletből $x+y$ értékét behelyettesítve

$$(x+y+z)^2=\left(z-\frac{1}{z}\right)^2=z^2+\frac{1}{z^2}-2,$$

így elég z^2 értékét meghatároznunk. Az egyenleteknek az előző megoldásban szereplő alakját használva adjuk, össze az első és utolsó egyenletet:

$$2xy+3xz=0, \qquad y=-\frac{3}{2}z.$$

Ezt a második egyenletbe helyettesítve

$$-\frac{9}{2}xz+2xz+\frac{3}{2}z^2=0, \quad \text{innen} \quad x=\frac{3}{5}z.$$

A nyert értékeket az első egyenletbe helyettesítve

$$-\frac{9}{5}z^2+\frac{6}{5}z^2+\frac{3}{2}z^2=1, \quad z^2=\frac{10}{9},$$

tehát

$$(x+y+z)^2=\frac{10}{9}+\frac{9}{10}-2=\frac{1}{90}.$$

2.*feladat: Melyik az a legkisebb* 4*-gyel végződő természetes szám, melynek utolsó jegyét a szám elé írva, az eredeti szám négyszereset kapjuk?*

I. megoldás: Jelöljük a keresett szám ismeretlen számjegyeit $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$-nel. Ekkor a feladat olyan szám keresését kívánja, melyre

$$4\cdot x_1x_2\ldots x_n4=4x_1x_2\ldots x_n.$$

Itt az egymásutáni betűk egy szám 10-es számrendszerbeli alakjának számjegyeit jelentik, a szorzás jelét mindig kiírjuk. A baloldal utolsó jegyét beszorozva 4-gyel ($4\cdot 4=16$) adódik, hogy $x_n=6$; ezt a baloldalon beírva folytathatjuk a szorzást és kapjuk, hogy $4\cdot 6=24$, $24+1=25$ és így $x_{n-1}=5$. Hasonlóan folytatva tovább sorra a 2, 0, 1 jegyeket kapjuk. Utóbbit 4-gyel szorozva 4-et kapunk, és nem marad továbbviendő egység, így kapjuk, hogy

$$4\cdot 102\,564=410\,256.$$

Nem kell az eljárást a 4-es jegynél befejezni, ekkor olyan számokhoz jutunk, melyek az 102 564 számjegysorozat többszöri megismétlésével keletkeznek. Ezek mind rendelkeznek a kívánt tulajdonsággal és az eljárásból belátható, hogy csak ezek a számok felelnek meg.

Lényegében ugyanígy adódik az eredmény akkor is, ha a jobboldali szám osztása révén határozzuk meg sorra a számjegyeket x_1-től kezdve.

II. megoldás: Legyen a 4-es előtti jegyekből álló szám x és legyen n jegyű. Ekkor az adott szám $10x+4$. A 4-es előre téve $4\cdot 10^n$-t fog jelenteni s ezt a számot követi az x szám. Így a feladat olyan x és n természetes számok keresését kívánja, amelyekre

$$4(10x+4)=4\cdot 10^n+x, \qquad 39x=4(10^n-4).$$

A feladat tehát olyan n egész szám keresését kívánja, melyre $4(10^n-4)$ osztható $39=3\cdot 13$-mal. Mivel

$$10^n-4=(10^n-1)-3=99\ldots 9-3$$

osztható 3-mal, így csak a 13-mal való oszthatóságot kell biztosítani, és mivel 4 relatív prím a 13-hoz, így csak 10^n-4 lehet 13-mal osztható. $10-4$ és 10^2-4 nem osztható vele, tehát $n>2$. Ez esetben

$$10^n-4=100\cdot 10^{n-2}-4=4\cdot(25\cdot 10^{n-2}-1)=4[26\cdot 10^{n-2}-(10^{n-2}+1)].$$

Itt a 4 relatív prím a 13-hoz, 26 osztható vele, tehát a $10^{n-2}+1$-nek kell 13-mal oszthatónak lennie. Tudjuk, hogy 1001 osztható 13-mal, így $n-2=3$, $n=5$ a legkisebb kitevő, amelyik megfelel a feltételnek.

$$x=\frac{4\cdot(10^5-4)}{39}=10\,256,$$

a keresett szám tehát

$$102\,564.$$

Megjegyzés: 1. A 10^m+1 kifejezés ($n-2$ helyett m-et írtunk) mindig osztható 13-mal, ha m a 3-nak páratlan többszöröse, mert ha $m=3(2k+1)$, akkor

$$10^m+1=(10^3)^{2k+1}+1=$$
$$=(10^3+1)(10^{3\cdot 2k}-10^{3(2k-1)}+10^{3(2k-2)}+\ldots-10^3+1)$$

és $10^3+1=7\cdot 11\cdot 13$. Ha viszont $m=3(2k+1)+r$, $r=1,\,2,\,3,\,4$ vagy 5, akkor

$$10^m+1=(10^{3(2k+1)+r}+10^r)-(10^r-1)=10^r(10^{3(2k+1)}+1)-(10^r-1).$$

Itt az első tag osztható 13-mal, a második viszont nem, mert $9,\,99=9\cdot 11$, $999=9\cdot 111=9\cdot 3\cdot 37$, $9999=9\cdot 1001+990$ és $99\,999=99\cdot 1001+900$; és itt egyik tényező sem osztható 13-mal, ill. az első tag osztható vele, a második azonban nem, tehát ($m=n-2$-t visszaírva) a felírt egyenlet összes megoldásai

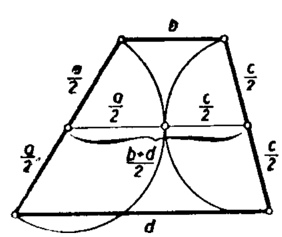
$$x=\frac{4(10^{6k+5}-4)}{39}, \qquad k=0,\ 1,\ 2\ \ldots .$$

Könnyen látható, hogy ezek éppen az előző megoldásban említett alakú számok.

2. Kérdés, nem csak véletlen-e, hagy találtunk a feltételnek megfelelő számot. Erre csak azt jegyezzük meg, hogy az utolsó feladatnak sincs mindig megoldása. *Fermat* egy nevezetes számelméleti tételéből, illetőleg annak *Euler*től származó általánosításából következik, hogy olyan m kitevő minden a egész számhoz van, amelyre 10^m-1 osztható a-val, ha a páratlan és nem osztható 5-tel; ezzel szemben 10^m+1 pl. 3-mal nem lehet osztható, mert $10^m+1=(10^m-1)+2$, ami 3-mal osztva 2-t ad maradékul, mert az első tag osztható 3-mal, bármilyen természetes szám is m.

3. *feladat: Bizonyítandó, hogy trapézba akkor és csak akkor írható az oldalakat érintő kör, ha szárak, mint átmérők fölé írt körök érintkeznek.*

I. megoldás: *a)* Tegyük fel, hogy a szárak fölé rajzolt körök érintkeznek. (1. ábra)

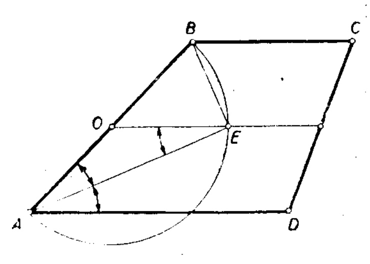


1. ábra

Ekkor a körök centrálisának hossza a sugarak összege, vagyis a szárak összegének a fele. Másrészt viszont a centrális éppen a trapéz középvonala, tehát hossza a párhuzamos oldalak összhosszának a fele. A feltételnek megfelelő trapézban tehát a szemközti oldalpárok összhossza megegyezik és tudjuk, hogy ha ez egy konvex négyszögre teljesül, akkor abba az oldalakat érintő kör írható. Tehát a feltétel elégséges.

b) Ha a trapézba az oldalakat érintő kör írható, akkor tudjuk, hogy a szemközti oldalpárok összege megegyezik s így a középvonal, melynek hossza a párhuzamos oldalak számtani közepe, egyben a szárak felének összegével is egyenlő s így a szárak mint átmérők fölé rajzolt körök közös pontban metszik a centrálist. De ha két körnek a centrálisukon van közös pontja, akkor e pontban érintkeznek. Tehát a feltétel szükséges is. Ezzel igazoltuk a bizonyítandó állítást.

II. megoldás: Tetszés szerinti $ABCD$ trapéz ($BC||AD$) AB szára fölé rajzoljunk félkört. Messe ez a középvonalat E-ben (2. ábra).



2. ábra

Ekkor E-n mennek át az A és B csúcsból húzott szögfelezők. Valóban, a félkör középpontját O-val jelölve $AOE\triangle$, egyenlő szárú s így $OAE\sphericalangle = OEA\sphericalangle$, mivel pedig a középvonal párhuzamos a párhuzamos oldalakkal, így $OEA\sphericalangle = EAD\sphericalangle$, tehát AE felezi az A-nál lévő szöget. Hasonlóan látható, hogy BE szögfelező.

A trapézba akkor és csakis akkor írható kör, ha a négy szögfelező egy ponton megy keresztül, tehát akkor és csakis akkor, ha a szárak fölé rajzolt köröknek közös pontja van a középvonalon, tehát ha e körök érintkeznek.

Egyben azt is nyertük, hogy a körök érintkezési pontja a beírt kör középpontját adja.

Megjegyzés. A versenyzők legnagyobb része csak a feladat egyik felét bizonyította be, mert nem volt tisztában azzal, hogy az »*akkor és csakis akkor*« azt jelenti, hogy be kell bizonyítani egyrészt, hogy a feltétel *elégséges* (»akkor«) és másrészt, hogy a feltétel egyszersmind *szükséges* is (»csakis akkor«), vagyis azt, hogy a tétel megfordítható. Hogy ez nincs mindig így – tehát bizonyításra szorul – ezt a következő két igen egyszerű példa világítja meg. »Ha egy szám 5-re végződik, akkor osztható 5-tel. Itt az »akkor« nem toldható meg »csakis akkor«-ral, mert az 5-re végződés *elégséges* feltétel ugyan, de *nem szükséges*, hiszen a 0-ra végződő számok is oszthatók 5-tel. Viszont a következű állításban: »Egy szám *csakis akkor* osztható 6-tal, ha páros«, nem írhatunk a »csakis akkor« elé »akkor«-t, mert a szám páros volta ugyan *szükséges* feltétel, de *nem elégséges*, mert hiszen sok páros szám nem osztható 6-tal. Tehát a fenti két állítás egyike sem fordítható meg. (Ugyanis nem mondhatjuk: »Az 5-re, végződő számok oszthatók 5-tel és fordítva, ha egy-egy szám osztható 5-tel, akkor 5-re végződik.« Hasonlóképpen hamis: »Minden 6-tal osztható szám páros és fordítva, minden páros szám osztható 6-tal.«)

A II. forduló feladatai

1. *feladat: Meghatározandó az x, y, z, u, v számjegyek értéke úgy, hogy a tízes számrendszerben felírt $x61y064zuv$ szám osztható legyen $61\,875-tel$.*

I. megoldás: Bontsuk törzstényezőkre az osztót:

$$61\,875 = 3^2 \cdot 5^4 \cdot 11 = 9 \cdot 11 \cdot 625.$$

Mivel itt az egyes tényezők páronként relatív primek, azért ahhoz, hogy a keresett szám e szorzattal osztható legyen szükséges és egyben elegendő is, hogy az egyes tényezők külön maradék nélkül meg legyenek benne.

625-tel azok és csak azok a számok oszthatók, amelyeknek utolsó 4 jegyéből álló szám is osztható 625-tel. (L. »K. M. L.« 1953. márciusi számában a 88. oldalon a 70. sz. gyakorlatot.) 625-nek 4000 és 4999 közt csak egy többszöröse van:

$$7 \cdot 625 = 4375, \quad \text{tehát} \quad 4zuv = 4375.$$

9-cel osztva minden szám ugyanazt a maradékot adja, mint a számjegyeinek összege, tehát kell, hogy

$$x + 6 + 1 + y + 0 + 6 + 4 + 3 + 7 + 5 = x + y + 32 = 9m.$$

11-gyel osztva minden szám ugyanannyi maradékot ad, mint az a szám, amelyet kapunk, ha az egyesektől kezdve, minden második számjegyet összeadunk és ebből az összegből levonjuk a kihagyott számjegyek összegét (L. »K. M. L.« 1953. márciusi számában a 81. oldalon a 475. sz. feladatot.) Jelen esetben

$$(5 + 3 + 6 + y + 6) - (7 + 4 + 0 + 1 + x) = (20 + y) - (12 + x) =$$
$$= 8 + y - x = 11n.$$

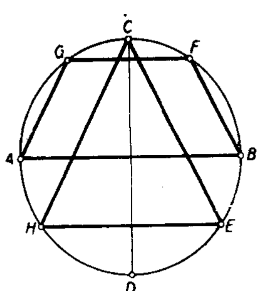
Tehát
$$x+y=9m-32 \quad \text{és} \quad -x+y=11n-8.$$
Itt x és y egyjegyű számok, tehát
$$0 \leq x+y \leq 18, \qquad -9 \leq -x+y \leq 9,$$
és így $m=4$ vagy 5, $n=0$ vagy 1. Mivel pedig két egész szám összege és különbsége közül nem lehet az egyik páratlan, a másik páros, így $m=4$, $n=0$ vagy $m=5$, $n=1$ felelhet meg. Első esetben y-ra negatív szám adódnék, tehát csak $x+y=13$ és $-x+y=3$ lehetséges, ahonnan $x=5$ és $y=8$.

A keresett szám tehát
$$5\,618\,064\,375,$$
és ennek valóban oszthatónak kell lennie 61 875-tel, mert az utolsó 3 jegy választása folytán osztható 625-tel, x és y megválasztása folytán pedig osztható 9-cel és 11-gyel.

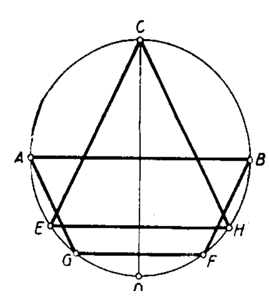
II. megoldás: Ha a szám osztható 61 875-tel, akkor pl. a 16-szorosa osztható $16\cdot 61\,875=990\,000$-rel, tehát minden esetre négy 0-val végződik. A kérdéses szám utolsó négy számjegye $4\cdot 16=64$ folytán megegyezik a
$$4000+16\cdot zuv$$
szánt utolsó négy jegyével. Mivel $16\cdot zuv<16\,000$, tehát csak úgy kaphatunk négy 0-ra végződő számot, ha
$$16\cdot zuv=6000, \quad \text{vagyis} \quad zuv=375.$$
A keresett szám 16-szorosának ezenkívül még 99-cel kell oszthatónak lennie. Mivel 16 és 99 relatív primek, ez csak akkor következik be, ha az eredeti szám is osztható 99-cel. 99-re viszont egyszerű oszthatósági szabály található. (L. »K. M. L.« 1953. áprilisi számában a 118. oldalon a 74. sz. gyakorlatot.) Mivel
$$100=99+1,\ 10\,000=99\cdot 101+1,\ 1\,000\,000=99\cdot 10\,101+1,$$
$$100\,000\,000=99\cdot 1\,010\,101+1,\ldots$$
ezért a keresett szám ugyanannyi maradékot ad 99-cel osztva, mint a következő kétjegyű számok összege:
$$x6+1y+06+43+75=xy+140.$$
Ez a szám 140-nél nagyobb, 240-nél kisebb, tehát csak úgy lehet 99-cel osztható, ha $2\cdot 99=198$-cal egyenlő, mely esetben
$$xy=58, \quad \text{tehát} \quad x=5,\ y=8,$$
és így a keresett szám
$$5\,618\,064\,375,$$
és ez valóban osztható 61 875-tel, mert osztható 99-cel, tehát a 16-szorosa is osztható vele, és a 16-szorosa ezenkívül négy 0-val végződik. Tehát 990 000-rel osztható a szám 16-szorosa és így az eredeti mindenesetre osztható ennek 16-odával, 61 875-tel.

2. *feladat: Egy kör AB és CD átmérői merőlegesek egymásra, a CE húr párhuzamos a BF húrral, E ill. F tükörképei CD-re vonatkozóan H ill. G. Bizonyítandó, hogy az $ABFG$ trapéz területe egyenlő CEH háromszög területével.*

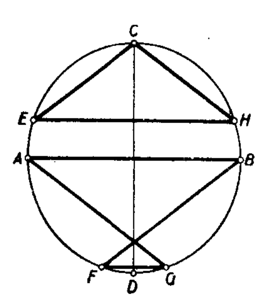
A leírás különböző ábrákhoz vezethet (1., 2. és 3. ábra), aszerint, hogy hol vesszük fel az E pontot. Az 1. ábrán a BD a 2.-on DA negyedkörön vettük az E pontot. A két ábrán, csak a trapéz helyzete tükrös egymáshoz képest az AB átmérőre vonatkozóan. Ez a területekre nincs befolyással. Ha ellenben E átjut az AC ívre (3. ábra), akkor az $ABFG$ négyszög hurkolt négyszög két párhuzamos oldallal: »hurkolt trapéz«.



1. ábra



2. ábra

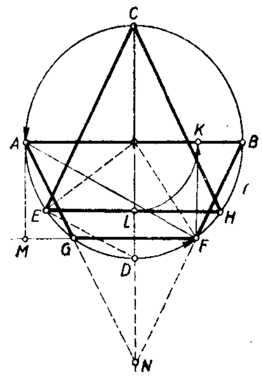


3. ábra

Az állítás erre az esetre is igaz, ha a hurkolt trapéz területét megfelelően értelmezzük, de hogy egyáltalán mit értsünk egy önmagát metsző négyszög területén, az eleve nem világos és ezért hibáztatható is a feladat megfogalmazása.

Az $ABGF$ trapéz területét venni, vagy akár a két háromszög területének összegét, ez a feladat szempontjából nem megfelelő, hiszen a keletkezett kettős háromszögből az AB oldalhoz csatlakozó hasonló a CEH háromszöghöz, de már egymagában is nagyobb nála, mert $AB > EH$. Hogy a terület milyen értelmezése mellett érvényes az állítás ebben az esetben is, az bizonyítás közben fog adódni. Ha E a CB ívre kerül, akkor lényegesen új esetet nem kapunk, csak a »hurkolt trapéz« kerül ismét az AB átmérő másik partjára. Térjünk ezután a feladat megoldására.

I. megoldás: Alakítsuk először a trapézt téglalappá úgy, hogy az F-ből AB-re bocsátott FK merőlegessel elvágott BFK háromszöget a GA oldalhoz illesztjük (4. ábra).



4. ábra

Az így keletkezett $AMFK$ téglalapot az AF átlóval két egyenlő részre osztjuk, és megmutatjuk, hogy a keletkezett $AFK\triangle$ egybevágó a CEH háromszög felét kitevő CEL háromszöggel, ahol L az EH húr középpontja (mely nyilván CD-re esik). Valóban forgassuk el utóbbit a kör középpontja körül az óra járásával ellenkező irányban $90°$-kal. Ekkor C átmegy A-ba és mivel D az elforgatás után B-be kerül, így L az AB átmérőre fog kerülni. Azt kell csak belátnunk, hogy az E pont F-be megy át, ez pedig teljesül, mert a BC és EF ívet párhuzamos húrok metszik ki a körből, tehát az EF ív is negyedkör.

A bizonyítás lényegtelen változtatással alkalmazható arra az esetre is, ha E a BD negyedkörön van (a következő megoldásból látható lesz, hogy hogyan), nem világos azonban, hogy hogyan vihető át a hurkolt esetre. Ez sokkal könnyebben lesz látható a következő megoldásból, amely szoros rokonságban van az elsővel.

II. megoldás: Az előbbi jelöléseket használva (4. ábra) nyilvánvaló, hogy AK a trapéz középvonalával egyenlő, tehát a trapéz ill. háromszög t_1 ill. t_2 területe

$$t_1 = AK \cdot FK, \quad t_2 = \frac{CL \cdot EH}{2} = CL \cdot EL.$$

Megmutatjuk, hogy

$$FK = EL \quad \text{és} \quad AK = CL,$$

ill. utóbbi helyett, hogy $BK = DL$. Mindkét egyenlőség következik abból, hogy

$$BFK\triangle \cong DEL\triangle.$$

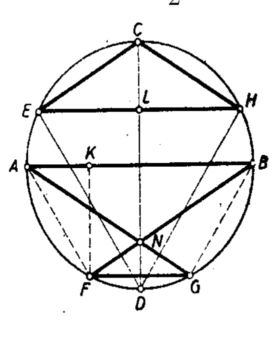
Forgassuk el az utóbbi háromszöget $90°$-kal az óra járásával ellenkező irányban a kör középpontja körül. Ekkor D átmegy B-be, EL pedig a B-hez húzott sugárra merőleges helyzetbe kerül, E pedig átmegy F-be, amint azt az I. megoldásban láttuk. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Megjegyzés: A bizonyítás »hurkolt trapéz« (5. ábra) esetén is azt adja, hogy

$$EL = FK, \quad DL = BK, \quad \text{amiből} \quad CL = AK,$$

tehát

$$EL \cdot CL = FK \cdot AK = FK. \quad \frac{AB - FG}{2} = \frac{FK \cdot AB}{2} - \frac{FK \cdot FG}{2}.$$



5. ábra

Baloldalt ismét a $CEH\triangle$ területe áll, a jobboldal viszont felfogható az AFB és AFG háromszögek területei különbségének. Ebből a különbségből kiesik a két háromszög közös részének a területe és marad a »hurkolt trapéz« nagyobb és kisebb háromszöge területének *különbsége.* A hurkolt esetben tehát e területkülönbség egyezik meg a CEH háromszög területével.

Számítás nélkül is bebizonyíthatjuk ezt az eredményt. Ugyanis a közönséges trapézra fentebb már bebizonyított tétel alapján az 5. ábrában a $DEH\triangle$ területe egyenlő az $ABGF$ *közönséges* trapéz területével, továbbá ugyancsak az előbbiek alapján $ABF\triangle \cong CDE\triangle \cong CDH\triangle \cong BGA\triangle$.

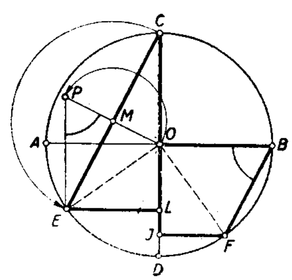
Tehát (területekről beszélve)

$$\begin{aligned} CEH &= CEDH - DEH = CEDH - ABGF = \\ &= CEDH - (ABF + ABG - ABN + FGN) = \\ &= CDE + CDH - ABF - ABG + ABN - FGN = ABN - FGN. \end{aligned}$$

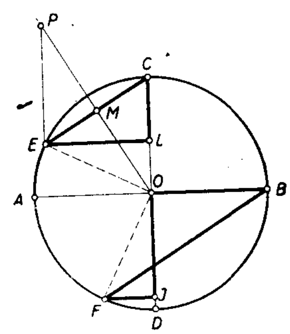
Könnyű a feladatot úgy fogalmazni, hogy a kettősség ne is lépjen fel. (L. 4. és 5. ábrát). Ha a BF és AG egyenesek metszéspontját mindenkor N-el jelöljük, akkor a CEH háromszög területe – *minden esetben* – az ABN és GFN háromszögek területének különbségével egyenlő.

A III. osztályosok más szempontból is érthetőnek fogják tartani a nyert eredményt. A koordináta-geometriában ugyanis kiderült, bizonyos szempontból előnyös lehet a területet előjeles mennyiségnek tekinteni, oly módon, hogy minden idomhoz megadjuk, hogy hogyan járjuk körül a kerületét (sokszögeknél ez például a csúcsok sorrendjével már meg van adva) és akkor azon idomok területét, melyek körüljárásban a jobbkezünk felé esnek, ellenkező előjelűnek nevezzük, mint amelyek körüljáráskor balról fekszenek. (Bármelyik lehet pozitív, de a másik minden esetben negatív lesz.) Ilyen értelmezés mellett hurkolt négyszög területéül mindig azon két háromszög területének különbsége adódik, melyekből a hurkolt négyszög áll.

III. megoldás: Mivel mindkét szóban forgó idom tükrös a CD átmérőre, mint tengelyre, így elég azt megmutatni, hogy a háromszög fele és a trapéz fele egyenlő területű, tehát ha az FG és EH húrok felezőpontjai J és L (6. ábra), akkor azt kell megmutatnunk, hogy a CEL háromszög és a $BFJO$ trapéz egyenlő területű.



6. ábra



7. ábra

Húzzuk meg az EC húr OM felező merőlegesét és forgassuk a CMO háromszöget az M pont körül az EM szakasz mellé. Az így keletkezett $ELOP$ derékszögű trapézban

$$EPO\sphericalangle = OBF\sphericalangle$$

mint merőlegesszárú szögek, mert PO merőleges a CE-vel párhuzamos BF húrra is. EP és OB, a trapézok hosszabb párhuzamos oldalai sugárnyi hosszúságúak és ugyancsak sugárnyi hosszúságú az EO ill. OF átló is. Így a $BFJO$ trapéz egybevágó, tehát egyenlő területű is, a $POLE$ trapézzal, tehát egyenlő területű a CEL háromszöggel is.

A hurkolt esetben is igaz, hogy az CEO háromszög átalakítható a PEO háromszöggé (7. ábra) és utóbbi egybevágó a BOF háromszöggel. Viszont előbbiből most el kell hagyni az ELO háromszöget, hogy a CEL háromszöget kapjuk. Ennek megfelelően BFO-ból OJF-fel egyenlő területet kell elvennünk. A közös rész elhagyása után a hurkolt négyszög OB-hez csatlakozó nagyobb háromszöge marad meg. Ebből kell még az FJ-hez csatlakozó kisebb háromszöget elvenni, hogy CEL-lel egyenlő területet kapjunk.

3. *feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c},$$

és n pozitív páratlan szám, akkor

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n+b^n+c^n}.$$

I. megoldás: Vigyük át az első egyenlet baloldaláról az utolsó tagot a jobboldalra:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{c}, \quad \frac{a+b}{ab}=\frac{-(a+b)}{c(a+b+c)}.$$

Redukáljuk az egyenletet 0-ra és emeljük ki $(a+b)$-t:

$$(a+b)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{c(a+b+c)}\right)=\frac{(a+b)[ab+(a+b)c+c^2]}{abc(a+b+c)}=$$
$$=\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc(a+b+c)}=0.$$

Ez csak úgy lehet 0, ha a számláló 0. Teljesen hasonlóan a második egyenlet

$$\frac{(a^n+b^n)(b^n+c^n)(c^n+a^n)}{a^nb^nc^n(a^n+b^n+c^n)}=0$$

alakba írható. Mivel páratlan pozitív egész n-re

$$u^n+v^n=(u+v)(u^{n-1}-u^{n-2}v+\ldots-uv^{n-2}+v^{n-1}),$$

azért a számláló osztható az

$$(a+b)(b+c)(c+a)$$

szorzattal, így a második egyenlőség is teljesül, ha az első teljesül.

II. megoldás: Az első egyenletet átalakítva

$$\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a+b+c}, \quad \text{vagyis} \quad (a+b+c)(ab+bc+ca)=abc.$$

Írjunk fel egy olyan egyenletet, melynek gyökei a, b és c:

$$0=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=$$
$$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-(a+b+c)(ab+bc+ca)=$$
$$=x^2[x-(a+b+c)]+(ab+bc+ca)[x-(a+b+c)]=$$
$$=[x-(a+b+c)][x^2+(ab+bc+ca)].$$

Az első alakról látható, hogy ez csak akkor teljesülhet, ha x megegyezik a b, c valamelyikével, az utolsóból viszont következik, hogy a kifejezés eltűnik, ha $x=a+b+c$, tehát utóbbinak meg kell egyeznie az előbbiek valamelyikével pl.

$$a+b+c=a, \quad c=-b,$$

s így páratlan egész n-re

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}-\frac{1}{b^n}=\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^n+b^n+(-b)^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}$$

is teljesül.