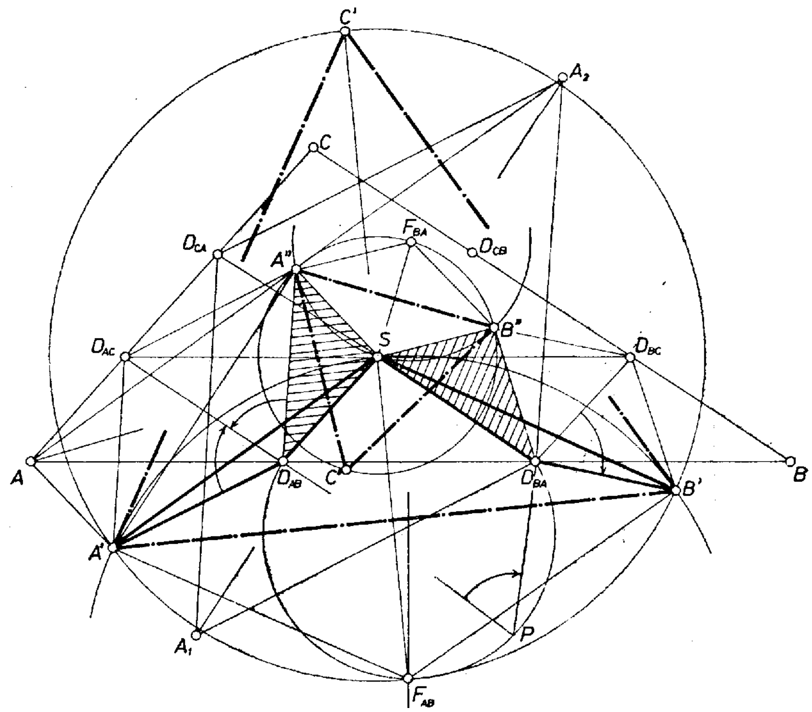
I. megoldás. Az S-en át berajzolt három szakasz végpontjai harmadolják az oldalakat. Jelöljük a 6 harmadoló pontot egyformán D-vel és indexbe írva az illető oldal végpontjainak betűjelét, éspedig elöl a harmadoló ponthoz közelebbi végpont jelét, tehát pl. $BD_{BC} = D_{BC}D_{CB} = D_{CB}C = a/3$ (1. ábra).



1. ábra

Továbbá mindegyik berajzolt szakasz hossza 2/3 része a vele párhuzamos oldalnak, és S felezi a szakaszt; az egy csúcsból induló két oldal harmadoló pontjait összekötő szakaszok ugyancsak párhuzamosak a szemben levő oldallal és hosszuk annak 1/3 része: pl. $SD_{BA} = SD_{CA} = D_{AB}D_{AC} = a/3$.

Eszerint A_1 és A_2 a $D_{BA}D_{CA}$ szakasz fölötti szabályos háromszögek csúcsai, az $A'A''$ szakasz az A_1A_2-nek, $D_{AB}D_{AC}$ pedig a $D_{BA}D_{CA}$-nak felére kicsinyített képe A-ból mint centrumból, így $A'D_{AB}D_{AC}$ és $A''D_{AB}D_{AC}$ is szabályos háromszögek, oldaluk hossza $a/3$, és ugyanígy $B'D_{BC}D_{BA}$ és $B''D_{BC}D_{BA}$ $b/3$ oldalú szabályos háromszögek.

Megmutatjuk, hogy az $A'D_{AB}S$ és $SD_{BA}B'$ háromszögek egybevágók és egymásba egy alkalmas elfordítással átvihetők. Bizonyításunkat az ábra pozitív körüljárású ABC háromszögéből létrejött alakzatra végezzük. Valóban,

$$\left|\overrightarrow{D_{AB}A'}\right| = \left|\overrightarrow{D_{AB}D_{AC}}\right| = \left|\overrightarrow{D_{BA}S}\right| = a/3, \quad \left|\overrightarrow{D_{AB}S}\right| = \left|\overrightarrow{D_{BA}D_{BC}}\right| = \left|\overrightarrow{D_{BA}B'}\right| = b/3$$

és

$$A'D_{AB}S\sphericalangle = SD_{BA}B'\sphericalangle,$$

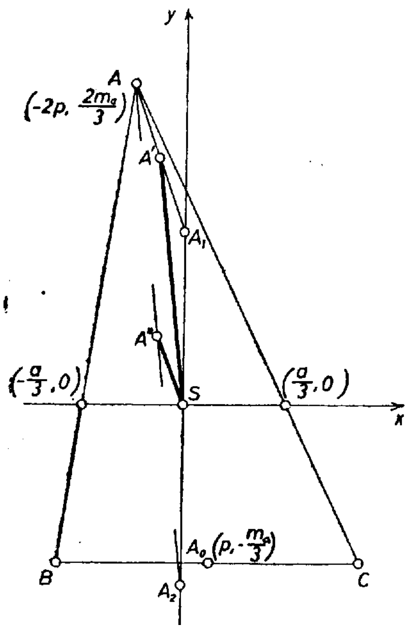
mert a $D_{AB}A'$ irányt a $D_{AB}D_{AC}$-vel egyirányú $D_{BA}S$ irányba ugyanúgy (-60°)-os elfordítás viszi át, mint a $D_{AB}S$ és $D_{BA}D_{BC}$ irányokat a $D_{BA}B'$-be. Ezért $A'S = SB'$, a mondott elfordítás F_{AB} középpontja pedig a $D_{AB}D_{BA}$ szakasz fölé a C-t nem tartalmazó partján szerkesztett szabályos háromszög új csúcsa, mert az elfordítás középpontja rajta van egyrészt a $D_{AB}D_{BA}$ szakasz felező merőlegesén, másrészt azon a látószögköríven, melynek P pontjaira a $D_{AB}PD_{BA}$ forgásszög nagysága (-60°). Így $A'F_{AB}S$ és $SF_{AB}B'$ szabályos háromszögek, tehát $A'SB'\sphericalangle = 120^\circ$.

Bizonyításunkban minden egyes A, B, C betű (indexbeli is) helyére rendre B, C, A betűt és D, S, F helyére önmagát írva $B'S = SC'$ adódik, ezt a fentivel egybevetve A', B', C' valóban egyenlő távolságra vannak S-től, továbbá $B'SC'\sphericalangle = 120^\circ$, tehát H' *szabályos háromszög.*

Ugyanígy az $A''D_{AB}S$ és $SD_{BA}B''$ egymásba fordíthatók, mert az $A''D_{AB}$ és SD_{BA} oldalak $(+60^\circ)$-os elfordítással, ill. párhuzamos eltolással a $D_{AB}D_{AC}$ szakaszon egymással fedésbe jutnak, ugyanúgy $D_{AB}S$ és $D_{BA}B''$ a $D_{BA}D_{BC}$ szakaszon – eltolással, ill. $(+60^\circ)$-os forgással –, így a 2–2 oldalszakaszból álló $A''D_{AB}S$ törött vonal valamilyen középpont körüli 60°-os elfordulással átjut az $SD_{BA}B''$ törött vonalba, tehát SA'' záró oldala $B''S$-be jut, így pedig e szakaszok egyenlők. Az elfordulás középpontja a fentihez hasonló megokolással a D_{AB}-t D_{BA}-ba vivő $(+60^\circ)$-os forgás középpontja, vagyis a $D_{AB}D_{BA}$ szakasz fölé a C-t tartalmazó oldalán szerkesztett szabályos háromszög új, F_{BA} csúcsa. Ebből a fentiekhez hasonlóan $A''SB''\sphericalangle = 120^\circ$, továbbá a fentihez hasonló megismétléssel S az $A''B''C''$ *szabályos háromszög* középpontja.

Lengyel Tamás (Budapest, Berzsenyi D. Gimn.)

II. megoldás *a feladat állító részére.* Helyezzük koordináta-rendszerünk origóját S-be, x tengelyének iránya legyen a BC irány, a BC oldal hossza a, felezőpontjának abszcisszája p, ordinátájának abszolút értéke így az m_a magasság $1/3$ része, legyen az előjele negatív: $A_0(p, -m_a/3)$.



2. ábra

Ekkor a súlypont harmadoló tulajdonsága folytán $A(-2p, 2m_a/3)$, a szerkesztett szabályos háromszögek közös alapjának végpontjai az x tengelyen $(-a/3, 0)$, $(a/3, 0)$ és a további pontok (2. ábra):

$$A_1\big(0, a/\sqrt{3}\big), \quad A_2\big(0, -a/\sqrt{3}\big); \quad A'\big(-p, ma/3 + a/2\sqrt{3}\big), \quad A''\big(-p, m_a/3 - a/2\sqrt{3}\big),$$

végül az utóbbi kettőnek S-től való távolsága:

$$SA'^2 = p^2 + \frac{m_a^2}{9} + \frac{a^2}{12} + \frac{am_a}{3\sqrt{3}}, \quad SA''^2 = p^2 + \frac{m_a^2}{9} + \frac{a^2}{12} - \frac{am_a}{3\sqrt{3}}.$$

Megmutatjuk, hogy e két kifejezés a háromszög oldalainak szimmetrikus függvénye, egyforma módon függ az a, b, c oldalhosszak mindegyikétől. Ebből már következik, hogy a számítást B'-re és C'-re, ill. B''-re és C''-re ismételve az eredmény ugyanaz, a feladat állítása helyes. (A számítás természetesen nem lenne ilyen egyszerű, a tengelyek más állása folytán.)

A kifejezések utolsó, megkülönböztető tagjában a számláló a terület 2-szerese, állításunk erre a tagra nyilvánvaló.

Az első két tag összege az A_0 és az origó közti távolság négyzetét adja, vagyis az $AA_0 = s_a$ súlyvonal négyzetének $1/9$ részét. Ámde ismert képlet szerint[1]

$$s_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$

ezzel kifejezéseink közös első három tagja állításunk szerint alakul:

$$\frac{s_a^2}{9} + \frac{a^2}{12} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{18}.$$

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk, sőt valamivel többet végeztünk, megadtuk a H', H'' háromszög köré írható kör sugarát az eredeti háromszög oldalainak függvényében.

Nyilvánvalóan minden háromszögben $SA'^2 > 0$, másrészt $SA''^2 \geq 0$, meg lehet ugyanis mutatni,[2] hogy a közös nevezőre hozott alak számlálója

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}t \geq 0,$$

és egyenlőség csak szabályos háromszög esetében teljesül (amikor A'' nyilvánvalóan S-ben adódik).

---

[1] Pl. az ABA^*C paralelogrammában:

$$AA^{*2} + BC^2 = AB^2 + BA^{*2} + A^*C^2 + CA^2, \qquad 4s_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2.$$

[2] A III. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladata, Veszprém, 1961, lásd K. M. L. 1128. feladat, 24. kötet, 208. o. (1962. május hó). – Rokonságban van a feladattal az 1527. feladat is, K. M. L. 36 (1968) 99. o.