Ez idén a Rákosi Mátyás matematikai versenyen már csak a gimnáziumok és ip. technikumok III. és IV. oszt. tanulói indulhattak. A verseny I. fordulója március 10-én folyt le az egyes iskoláknál. Az alábbi 3 feladat volt kitűzve (munkaidő: 5 óra):

1. Megoldandó a következő egyenletrendszer:

$$x + xy + y + 5 = 0 \tag{1}$$
$$x^2y + xy^2 + 6 = 0.$$

2. Az $ABCD$ négyzet belsejében lévő P pontnak az A, B, C csúcsoktól való távolsága rendre 2, 3, 4. Szerkesszük meg e négyzetet és számítsuk ki a területét.

3. Megoldandó a következő egyenlet:

$$\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - 2\sin x}, \tag{2}$$

Beadtak összesen 2943 dolgozatot, amelyeknek eredménye alapján összesen 189 tanuló (6,4%) került a döntőbe. (Tekintve, hogy számos résztvevő nem adott be dolgozatot, az összes indulók száma 3000-nél jóval többre tehető.) Részletes adatok megyék és iskolafajok szerint az itt közölt táblázatos kimutatásban találhatók. A döntőbe került tanulók megoszlása nemek szerint: 178 fiú, 11 lány. Örömmel állapítottuk meg, hogy a döntőbe került 189 tanuló közül 92-en lapunk feladatmegoldói.

A döntő április 12-én folyt le a megyeszékhelyeken és Budapesten a József Attila gimnáziumban. A döntőről a legközelebbi (szeptemberi) számban számolunk be.

Alább közöljük az I. forduló feladatainak megoldásait.

1. *feladat.*

I. megoldás: Az első egyenletből

$$y(x+1) + x + 5 = 0.$$

Itt x nem lehet -1, így y-t kifejezhetjük:

$$y = -\frac{x+5}{x+1}.$$

Ezt a második egyenletbe helyettesítve és rendezve az

$$x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 37x - 6 = 0$$

egyenlethez jutunk. Vizsgáljuk meg, hogy van-e ennek racionális gyöke. Tudjuk, hogy ha van ilyen megoldás, akkor annak számlálója az állandó tagnak, -6-nak, nevezője pedig a legmagasabb fokú tag együtthatójának, tehát esetünkben 1-nek osztója. Így csak az $x = \pm 1$, ± 2, ± 3 és ± 6 értékek jöhetnek számításba. Kipróbálva azt találjuk, hogy -2 és 3 valóban gyök is. Így az egyenlet baloldalából kiemelhetőnek kell lennie az ezekhez tartozó gyöktényezők szorzatának, az

$$(x+2)(x-3) = x^2 - x - 6$$

polinomnak és valóban negyedfokú egyenletünk baloldala így írható:

$$(x^2 - x - 6)(x^2 + 6x + 1).$$

Így a már megtalált gyökökön kívül gyökei még az egyenletnek az

$$x^2 + 6x + 1 = 0$$

egyenlet gyökei. Az összes gyökök tehát

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -3 + 2\sqrt{2}, \quad x_4 = -3 - 2\sqrt{2}.$$

és a megfelelő y-értékek:

$$y_1 = 3, \quad y_2 = -2, \quad y_3 = -3 - 2\sqrt{2}, \quad y_4 = -3 + 2\sqrt{2}.$$

Kimutatás az 1953. évi Rákosi Mátyás matematikai verseny I. fordulójáról megyék és iskolafajok szerint

Megyék és Budapest	Beadott dolgozatok			Döntőbe került		
	Gimnázium	Ip. techn.	Összesen	Gimnázium	Ip. Techn.	Összesen
1. Baranya	93	39	132	7	–	7
2. Bács-Kiskún	91	4	95	4	–	4
3. Békés	147	19	166	10	2	12
4. Borsód	142	42	184	4	4	8
5. Csongrád	94	61	155	8	4	12
6. Fejér	27	13	40	2	–	2
7. Győr-Sopron	107	19	126	18	–	18
8. Hajdu-Bihar	100	25	125	4	1	5
9. Heves	29	10	39	4	–	4
10. Komárom	100	26	126	9	–	9
11. Nógrád	25	12	37	3	–	3
12. Pest	68	2	70	3	–	3
13. Somogy	23	6	29	4	–	4
14. Szabolcs–Szatmár	68	16	84	2	–	2
15. Szolnok	106	5	111	5	1	6
16. Tolna	83	–	83	–	–	–
17. Vas	118	3	121	2	–	2
18. Veszprém	100	5	105	9	–	9
19. Zala	28	6	34	3	–	3
20. Budapest	1011	70	1081	64	12	76
Összesen	2560	383	2943	165	24	189

II. megoldás: A második egyenlet így írható

$$xy(x+y)+6=0$$

és vegyük észre, hogy az $u=x+y$ és $v=xy$ kifejezések összege és szorzata van megadva:

$$u+v=-5, \qquad uv=-6.$$

u és v tehát a

$$t^2+5t-6=0$$

egyenlet két gyöke, vagyis

$$u_1=\frac{-5+7}{2}=1, \qquad v_1=\frac{-5-7}{2}=-6,$$

vagy fordítva

$$u_2=-6, \qquad v_2=1.$$

Mivel ezek jelentése $x+y$, ill. xy, tehát x és y a

$$z^2-z-6=0$$

és a

$$z^2+6z+1=0$$

egyenlet két gyöke lehet. Az első egyenletből

$$x_1 = 3, \qquad y_1 = -2; \qquad\qquad x_2 = -2, \qquad y_2 = 3.$$

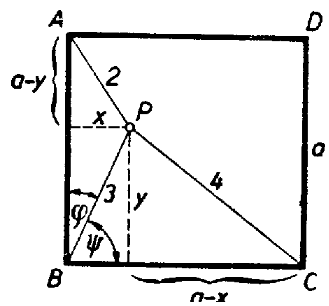
A második egyenletből

$$x_3 = -3 + 2\sqrt{2}, \qquad\qquad y_3 = -3 - 2\sqrt{2};$$
$$x_4 = -3 - 2\sqrt{2}, \qquad\qquad y_4 = -3 + 2\sqrt{2}.$$

2. *feladat.*

I. megoldás:

a) *A terület kiszámítása:* Képzeljük a feladatot megoldottnak. A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Az

(1) $$x^2 + (a-y)^2 = 4,$$
(2) $$x^2 + y^2 = 9,$$
(3) $$(a-x)^2 + y^2 = 16,$$

egyenletrendszerből akarjuk kiszámítani a-t, illetőleg a^2-et. (2)-ből levonva (1)-et és (3)-ból (2)-t

(4) $$2ay - a^2 = 5,$$
(5) $$a^2 - 2ax = 7.$$

A (2) alatti egyenletet $4a^2$-tel szorozva, továbbá (5) és (4)-ből $2ax$ és $2ay$ értékét behelyettesítve

$$(a^2-7)^2 + (a^2+5)^2 = 36a^2.$$

$z = a^2$ új ismeretlent vezetve be

$$2z^2 - 40z + 74 = 0, \qquad \text{vagyis} \qquad z^2 - 20z + 37 = 0,$$

ahonnan

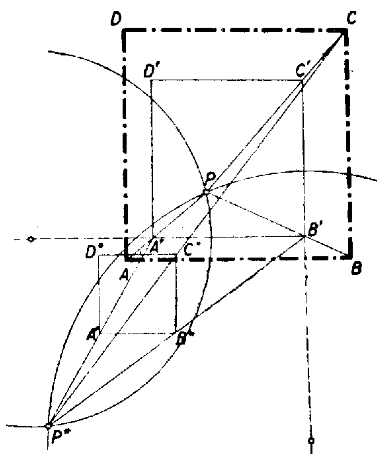
$$a^2 = z = 10 \pm \sqrt{63}.$$

Tehát

$$a_1^2 = 10 + 3\sqrt{7} \approx 17{,}9374, \qquad a_2^2 = 10 - 3\sqrt{7} \approx 2{,}0629.$$

Az a_2 oldalú négyzetnek P nincs a belsejében, mert $\sqrt{2}a_2 < 3 = BP$.

b) *A négyzet megszerkesztése:* A P pontról azt tudjuk, hogy az A és B ponttól mért távolságainak az aránya $2:3$, a B és C ponttól vett távolságainak aránya pedig $3:4$. Ennek alapján a négyzet megszerkesztése a következőképpen történhet: rajzoljunk tetszés szerinti $A'B'C'D'$ négyzetet és azt az Apollonius-kört, amelynek pontjaira nézve az A' és B' ponttól mért távolságok aránya $2:3$, továbbá azt, amely pontjainak a B' és C' ponttól mért távolságai aránya $3:4$. E két körnek van 2 metszéspontja P és P^* (2. ábra).



2. ábra

Nagyítsuk vagy kicsinyítsük a négyzetet a P (ill. P^*) pontból, mint hasonlósági centrumból úgy, hogy AP (ill. AP^*) 2 hosszegység legyen. Az egyik megoldásban a P pont a négyzeten kívül van.

II. megoldás:

a) *A terület kiszámítása:* A következő út, amelyen több versenyző elindult, jó példa arra, hogy nem minden helyes összefüggés alkalmas a feladat áttekinthető megoldására.

Aszerint, amint P az $ABC_\triangle$-ben, vagy $ACD_\triangle$-ben van, fennáll a területekre vonatkozó

$$t_{ABP}+t_{BCP}+t_{ACP}=\frac{a^2}{2}$$

egyenletek egyike, ahol a a keresett négyzet oldala. Az egyes háromszögek oldalhosszai 2, 3, a, ill. 3, 4, a, ill. 2, 4, $a\sqrt{2}$, így Heron képlete szerint

$$\begin{aligned}
t_{ABP}&=\sqrt{\frac{5+a}{2}\cdot\frac{a+1}{2}\cdot\frac{a-1}{2}\cdot\frac{5-a}{2}}=\frac{1}{4}\sqrt{(25-a^2)(a^2-1)},\\
t_{BCP}&=\sqrt{\frac{7+a}{2}\cdot\frac{a+1}{2}\cdot\frac{a-1}{2}\cdot\frac{7-a}{2}}=\frac{1}{4}\sqrt{(49-a^2)(a^2-1)},\\
t_{ACP}&=\sqrt{\left(3+\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+1\right)\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-1\right)\left(3-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{(18-a^2)(a^2-2)}.
\end{aligned}$$

Ezeket a fenti egyenletbe helyettesítve egy tagot a baloldalra kellene vinni, majd háromszori négyzetre emelés után jutnánk algebrai egyenletre, mely közben nem egyszerűsödik lényegesen. Így ezen az úton nem jutunk gyakorlatilag kezelhető megoldásra, bár teljesen helyesen írtunk fel közben egy egyetlen ismeretlent tartalmazó egyenletet.

Azért a Heron-képlettel is célhoz érhetünk, a következő módon. (A jelölést az 1. ábra mutatja.) Az előbbiek alapján

$$4t_{ABP}^2=(2t_{ABP})^2=\frac{1}{4}(25-a^2)(a^2-1)=(ax)^2=a^2x^2, \tag{1}$$

$$4t_{BCP}^2=(2t_{BCP})^2=\frac{1}{4}(49-a^2)(a^2-1)=(ay)^2=a^2y^2, \tag{2}$$

továbbá

$$x^2+y^2=3^2=9. \tag{3}$$

(1) és (2)-ből x^2, ill. y^2 értékét (3)-ba helyettesítve, rendezés után az I. megoldásban szereplő

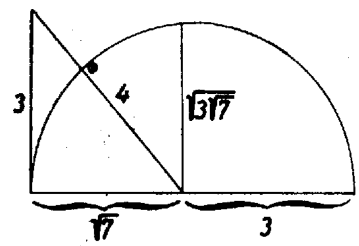
$$a^4-20a^2+37=0$$

egyenletet nyerjük.

b) *A négyzet megszerkesztése:* Tegyük fel, hogy a keresett négyzet oldalhosszát (pl. az I. megoldásban megadott módon) kiszámítottuk:

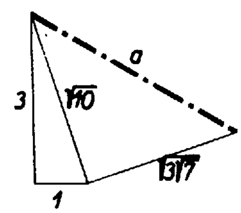
$$a-\sqrt{10+3\sqrt{7}}.$$

Ez az eredmény és általában minden olyan formula, amelyik az adott mennyiségekből a 4 alapművelet (ide tartozik az egész kitevőjű hatványozás) és véges számú négyzetgyökvonás alkalmazásával előállítható, mindjárt módot is ad a kérdéses adat megszerkesztésére. (Lásd 544. sz. kitűzött feladatot.) Esetünkben, ha ismert az egység (pl. a 3 és 2 hosszúságú távolságok különbsége), a nem egyéb, mint olyan derékszögű háromszög átfogója, melynek befogói $\sqrt{10}$ ill. $\sqrt{3\sqrt{7}}$. Ez utóbbi távolságot úgy szerkeszthetjük meg, hogy előbb megszerkesztjük $\sqrt{7}$-et és azután $\sqrt{7}$ és 3 között a mértani középarányost. $\sqrt{7}$ pl. olyan derékszögű háromszög befogójaként nyerhető, amelynek ismert befogója 3 egység, átfogója 4 egység (3. ábra).



3. ábra

$\sqrt{10}$ olyan derékszögű háromszög átfogója, amelynek befogói 3 és 1 egység (4. ábra).



4. ábra

(Teljesen hasonlóképpen szerkeszthető meg a másik gyök: $\sqrt{10-3\sqrt{7}}$ is.

Megjegyzés: Lényeges volt, hogy szerkesztéseinkben csak a kiindulásul adott távolságokat és az azokból *megszerkesztetteket* (pl. $\sqrt{7}$, $\sqrt{3\sqrt{7}}$) használtuk fel. Többen a számítással kapott eredményt (irracionális szám közelítő értékét) mérőlécről igyekeztek körzőnyitásba venni és ezzel a távolsággal »szerkesztettek« négyzetet. (Valójában csak »rajzoltak« négyzetet). Ilyen módon természetesen a legtöbb szerkesztés nem okozna gondot annak, aki ismeri a trigonometriát. Ilyen eljárást azonban nem nevezünk »szerkesztés«-nek, bármilyen jó is legyen gyakorlati szempontból, mert a megengedett szerkesztő eszközök között nem szerepel a távolság- és szögmérő, hanem csak a körző és vonalzó.

III. megoldás:

a) *A terület kiszámítása:* Térjünk vissza az 1. ábrához. Legyen $ABP\sphericalangle=\varphi$, $PBC\sphericalangle=\psi$. Számítsuk ki $\cos\varphi$-t, ill. $\cos\psi$-t a cosinus-tétel segítségével az ABP, ill. PBC háromszögekből. A kifejezésekben egyedül az $AB=BC=a$ négyzetoldal lesz ismeretlen. Erre pedig abból kaphatunk egy egyenletet, hogy $\varphi+\psi=90^\circ$, s így $\cos\psi=\sin\varphi$, vagyis

$$\cos^2\varphi+\cos^2\psi=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1. \tag{1}$$

Az ABP háromszögből

$$a^2+3^2-6a\cos\varphi=2^2,$$

ahonnan

$$\cos\varphi=\frac{a^2+3^2-2^2}{6a}=\frac{a^2+5}{6a}. \tag{2}$$

A PBC háromszögből

$$a^2+3^2-6a\cos\psi=4^2,$$

ahonnan

$$\cos\psi=\frac{a^2+3^2-4^2}{6a}=\frac{a^2-7}{6a}. \tag{3}$$

A (2) és (3) alatti értékeket (1)-be helyettesítve

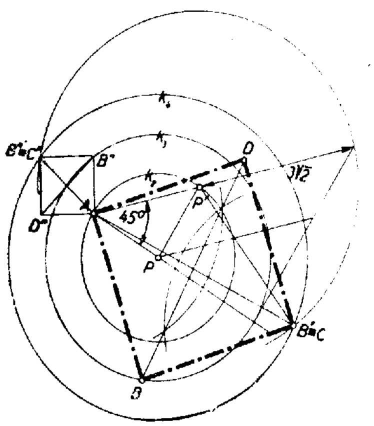
$$\left(\frac{a^2+5}{6a}\right)^2+\left(\frac{a^2-7}{6a}\right)^2=1,$$

amiből

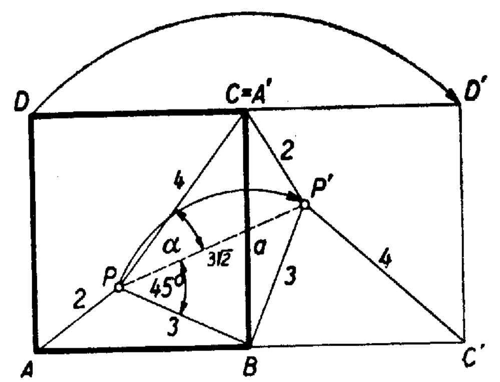
$$a^4 - 20a^2 + 37 = 0.$$

Ezzel az első megoldásban már szereplő egyenlethez jutottunk.

b) *A négyzet megszerkesztése:* Az A, B, ill. C pontok rendre a P pont körül 2, 3, ill. 4 egységnyi sugarú k_2, k_3, k_4 körön lesznek (5. ábra). Az egyik csúcsot, pl. A-t tetszés szerint megválaszthatjuk a k_2 körön. Képzeljük most megszerkesztettnek a négyzetet. A négyzet B csúcsát átvihetjük C-be úgy, hogy A körül 45°-kal elforgatjuk és egyidejűleg A-ból $1 : \sqrt{2}$ arányban nyújtjuk. Hajtsuk végre ezt a transzformációt a k_3 körre vonatkozóan, akkor a keletkezett új kör (P' körül $3\sqrt{2}$ sugarú) metszi ki a k_4 körből a keresett négyzetnek A-val szemközt fekvő C (ill. C^*) csúcsát. Ennek ismeretében a másik két csúcspont már könnyen megkapható. Ismét csak egy esetben lesz P a négyzet belsejében.



5. *ábra*

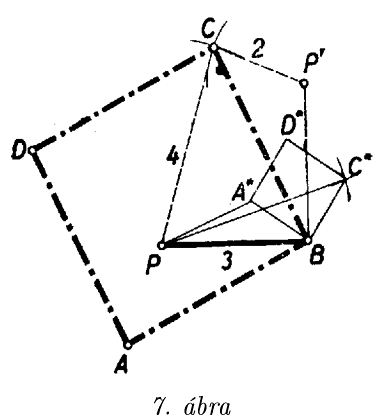


6. *ábra*

IV. megoldás:

a) *A négyzet megszerkesztése:* Képzeljük a feladatot megoldottnak és forgassuk el a négyzetet a B csúcs körül 90°-kal úgy, hogy az A csúcs elforgatása: A' a C csúcsra kerüljön (6. ábra). A P elforgatása P' és a forgatás szöge miatt $PBP'\sphericalangle = 90°$ és természetesen $PB = BP' = 3$.

Ezek alapján a szerkesztés menete: szerkesszünk egyenlőszárú derékszögű PBP' háromszöget $PB = BP' = 3$ hosszúságú szárakkal (7. ábra) és szerkesszük meg azokat a pontokat, amelyek P-től 4, P'-től 2 egység távolságra vannak. 2 megoldás: C és C^*. Ezek a pontok felelnek meg a B-vel szomszédos csúcsnak. C (ill. C^*) ismeretében a négyzet már könnyen megszerkeszthető. Ismét csak az egyik négyzet felel meg feltételünknek.



7. *ábra*

b) *A terület kiszámítása:* A szerkesztés módot ad a számítás elvégzésére is. A $BPC_\triangle$-ből (6. ábra) a cosinus-tétel szerint

$$a^2 = BP^2 + PC^2 - 2\cdot BP\cdot PC\cdot\cos(45° + \alpha) = 3^2 + 4^2 - 24(\cos 45°\cos\alpha - \sin 45°\sin\alpha) =$$
$$= 25 - 12\sqrt{2}(\cos\alpha - \sin\alpha). \tag{1}$$

A $CPP'_\triangle$-ből

$$CP'^2 = CP^2 + PP'^2 - 2\cdot CP\cdot PP'\cos\alpha = 4^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 24\sqrt{2}\cos\alpha,$$

ahonnan

(2) $$\cos\alpha = \frac{16+18-4}{24\sqrt{2}} = \frac{30}{24\sqrt{2}} = \frac{5}{4\sqrt{2}},$$

és így

(3) $$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{25}{32}} = \sqrt{\frac{7}{32}} = \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}.$$

A (2) és (3) alatti értékeket (1)-be helyettesítve

$$a^2 = 25 - 12\sqrt{2}\left(\frac{5}{4\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}\right) = 25 - 15 + 3\sqrt{7} = 10 + 3\sqrt{7}.$$

(A szerkesztés második megoldása a $45^\circ - \alpha$ szögnek felel meg.)

Megjegyzés: A szerkesztés és a számítás is elvégezhető bármelyik bemutatott módon, akkor is, ha 2, 3, 4 helyett más $AP = p$, $BP = q$, $CP = r$ távolság van adva. A és C szimmetrikus helyzete miatt feltehetjük, hogy $p \leq r$. Ez esetben az utolsó megoldásból pl. azonnal adódik, hogy a feladat akkor és csakis akkor oldható meg, ha

$$p + r \geq \sqrt{2}q \qquad \text{és} \qquad p + \sqrt{2}q \geq r,$$

azaz

$$p \geq |\sqrt{2}q - r|.$$

3. feladat.

I. megoldás: Azon x értékek jönnek csak számításba, amelyekre

$$1 - \sin 2x \neq 0, \qquad \text{vagyis} \qquad x \neq \frac{\pi}{4} \pm k\pi \ (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Rendezve az egyenletet

$$(\sin x + \cos x)(1 - 2\sin x\cos x) - \cos^2 x + \sin^2 x = 0,$$

vagyis

$$\sin x + \cos x - 2\sin^2 x\cos x - 2\sin x\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x = 0$$

$\sin^2 x$ helyett mindenütt $1 - \cos^2 x$-et írva és rendezve

$$\sin x - \cos x + 2\cos^3 x - 2\sin x\cos^2 x - 2\cos^2 x + 1 = 0.$$

A páratlan fokú tagokból $\sin x$-et, ill. $\cos x$-et kiemelve

$$\sin x(1 - 2\cos^2 x) + \cos x(2\cos^2 x - 1) - 2\cos^2 x + 1 = 0$$

A baloldalon kiemelhető $2\cos^2 x - 1$:

$$(2\cos^2 x - 1)(\cos x - \sin x - 1) = 0.$$

Innen vagy

(1) $$2\cos^2 x - 1 = 0,$$

vagy

(2) $$\cos x - \sin x - 1 = 0.$$

(1)-ből

(3) $$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

vagy

(4) $$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(2)-ből

$$\cos x = 1 + \sin x$$

vagyis

$$\cos^2 x = 1 + 2\sin x + \sin^2 x,$$

amiből ($\cos^2 x$ helyébe $1 - \sin^2 x$-et írva és rendezve)

$$2\sin^2 x + 2\sin x = 2\sin x(\sin x + 1) = 0 \tag{5}$$

Egyelőre csak a főértékekre szorítkozva
(3)-ból

$$x = \frac{\pi}{4}, \tag{6}$$

$$x = \frac{7\pi}{4}, \tag{7}$$

(4)-ből

$$x = \frac{3\pi}{4}, \tag{8}$$

$$x = \frac{5\pi}{4}, \tag{9}$$

(5)-ből

$$x = 0, \tag{10}$$

$$x = \pi, \tag{11}$$

$$x = \frac{3\pi}{2}. \tag{12}$$

Mivel nem mindig hajtottunk végre egyenértékű (ekvivalens) átalakításokat (pl. négyzetre emeltünk), azért meg kell vizsgálnunk, vajon a nyert gyökök kielégítik-e *eredeti* egyenletünket.

A (6) és (9) alatti gyökök éppen a kizárt értékek. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy a (11) alatti gyök nem tesz eleget egyenletünknek, amíg a többi 4 gyök tényleg kielégíti egyenletünket.

Tehát a keresett gyökök főértékei ($0 \le x < 2\pi$) nagyságrendben:

$$x_1 = 0 = 0°, \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} = 135°, \quad x_3 = \frac{3\pi}{2} = 270°, \quad x_4 = \frac{7\pi}{4} = 315°.$$

Természetesen e főértékekhez $2\pi = 360°$ többszöröseit hozzáadva vagy kivonva, ugyancsak gyököket nyerünk. Tehát az összes gyökök (x_2 és x_4 et egy képletbe összefoglalva):

$$x = \pm\, 2k\pi = \pm k \cdot 360°,\ \ x = \frac{3\pi}{4} \pm k\pi = 135° \pm k \cdot 180°,$$
$$x = \frac{3\pi}{2} \pm 2k\pi = 270° \pm k \cdot 360°, \quad \text{ahol } k = 0, 1, 2, \ldots$$

II. megoldás: Azok az x-ek jönnek csak tekintetbe, melyekre

$$1 - \sin 2x \ne 0. \tag{1}$$

Emeljük az egyenlet mindkét oldalát négyzetre, ekkor

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1 + \sin 2x$$

folytán az egyenletben csak $2x$ szögfüggvényei fognak szerepelni. Az egyenletet 0-ra redukálva és alkalmasan átalakítva:

$$(1 + \sin 2x)(1 - \sin 2x)^2 - \cos^2 2x = (1 - \sin^2 2x)(1 - \sin 2x) - \cos^2 2x =$$
$$= (1 - \sin^2 2x)(1 - \sin 2x) - (1 - \sin^2 2x) = -\sin 2x(1 - \sin^2 2x) =$$
$$= -\sin 2x(1 + \sin 2x)(1 - \sin 2x) = 0 \tag{2}$$

Itt (1) szerint az utolsó tényező nem lehet 0, tehát csak a

$$\sin 2x = 0 \qquad \text{és} \qquad \sin 2x = -1$$

egyenletek megoldásai jönnek számításba.

A $0 \le x < 2\pi$ közben előbbi az $x = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$ értékekre, utóbbi pedig az $x = \frac{3\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}$ értékekre teljesül. Ezek közül az eredeti egyenletnek csak

$$x = 0, \frac{3\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}$$

értékek gyökei és természetesen minden olyan x érték, amely ezek valamelyikétől $\pm 2k\pi$-vel különbözik, ahol $k = 1, 2, \ldots$.

III. megoldás: Az átalakításokat kissé ügyesebben is végezhetjük: ha

$$\cos x \neq \sin x, \text{ azaz } \operatorname{tg} x \neq 1, \; x \neq \frac{\pi}{4} \pm k\pi, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

akkor

$$\sin x + \cos x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 - 2\sin x \cos x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos^2 x - 2\sin x \cos x + \sin^2 x} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}.$$

Rendezve az egyenletet

$$(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x - 1) = 0,$$

tehát vagy

(1) $$\sin x + \cos x = 0$$

vagy

(2) $$\cos x - \sin x - 1 = 0$$

(1)-ből, mivel $\cos x$ és $\sin x$ nem tűnhet el egyszerre, s így az egyenlet megoldásaira egyik tag sem 0,

$$\operatorname{tg} x = -1, \qquad x = -\frac{\pi}{4} \pm k\pi \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

(2)-ből

$$1 - \cos x = -\sin x, \qquad 2\sin^2 \frac{x}{2} = -2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$
$$2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Itt vagy

$$\sin\frac{x}{2} = 0, \quad \frac{x}{2} = \pm k\pi \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

azaz

$$x = \pm 2k\pi \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

vagy pedig

$$\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0,$$

amiből

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1, \quad \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} \pm k\pi \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

azaz

$$x = -\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

A nyert értékek megoldást szolgáltatnak, mert ekvivalens átalakításokat végeztünk.

IV. megoldás: Induljunk ki a III. megoldásban nyert

$$\sin x + \cos x = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$$

alakból.
Itt

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x\right) =$$
$$= \sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right),$$

és

$$\frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4}}{\cos x \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)},$$

tehát az egyenlet

$$\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}.$$

Írjunk $\frac{\pi}{4}+x=y$-t, ekkor $\left(\text{mivel feltételeztük,hogy} x\neq\frac{\pi}{4}\pm k\pi\right)$

$$y\neq\frac{\pi}{2}\pm k\pi\ (k=0,1,2,\ldots),\qquad \text{azaz}\ \cos y\neq 0,$$

és az egyenlet így alakul

$$\sin y\left(\sqrt{2}\cos y-1\right)=0,$$

tehát vagy

$$\sin y=0,\qquad \text{vagy}\qquad \cos y=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Az elsőből

$$y=\pm k\pi\qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

a másodikból

$$y=\pm\frac{\pi}{4}\pm 2k\pi\qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

azaz

$$x=-\frac{\pi}{4}\pm k\pi,\quad \text{vagy}\quad x=\pm 2k\pi,\quad \text{vagy}\quad x=-\frac{\pi}{2}\pm 2k\pi,$$

ahol $k=0,1,2,\ldots$.

Minden átalakítás ekvivalens átalakítás volt, így mindezen értékek gyököket szolgáltatnak.